e-LEE
e-Learning tools for Electrical Engineering

Mărimi sinusoidale

Tematica: *Circuite electrice*
→ ***Capitol:*** *Regim sinusoidal*
→ ***Secțiunea:***

Tip resursă: ☒ *Expunere* ☐ *Laborator virtual / Exercițiu* ☐ *CVR*

În acest capitol se va face o scurtă introducere asupra mărimilor alternative, în care se va arăta de ce sistemele alternative sinusoidale (AC) s-au impus în fața sistemelor de curent continuu (DC). Se vor prezenta apoi parametrii ce caracterizează mărimile alternative sinusoidale şi mai ales valoarea efectivă (eficace) a unei mărimi periodice, particularizând calculele pentru o mărime alternativă sinusoidală.

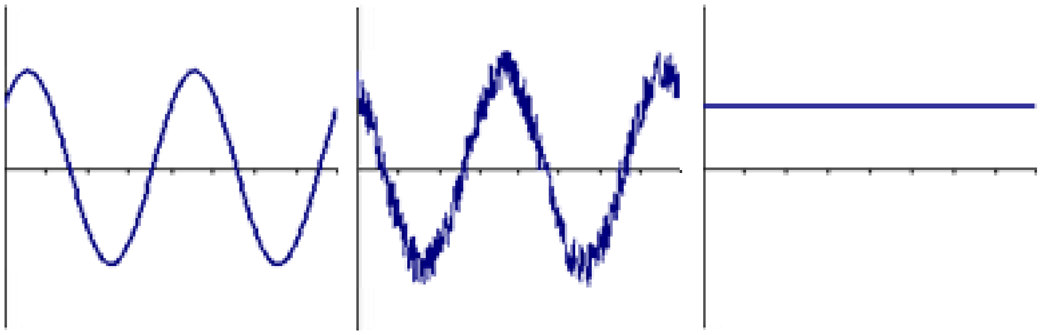
Pentru reprezentarea mărimilor de c.a., utilizarea notației complexe (fazori rotitori) simplifică tratarea matematică necesară pentru analiza regimului permanent al circuitelor de c.a. Se vor explica apoi câteva operații matematice aplicate fazorilor şi semnificațiile lor grafice.

- cunoştințe anterioare necesare:
- nivel:
- durata estimată: 30 minute
- autor: Maria José Resende
- realizare: Sophie Labrique
- traducere: Sergiu Ivanov

Resursă realizată cu sprijin financiar din partea Comunității Europene. Documentul de față nu angajează decât responsabilitatea autorului(rilor) lui. Comisia îşi declină orice responsabilitate ce ar putea decurge din utilizarea lui.

1. Introducere

Funcțiile alternative sinusoidale sunt deosebit de importante pentru analiza circuitelor, deoarece cea mai mare parte a sistemelor de producere şi distribuție a energiei electrice generează şi transferă energie prin intermediul unor mărimi a căror evoluție în timp poate fi considerată ca fiind sinusoidală; în mod obişnuit, prescurtarea care desemnează această formă de energie este "c.a.", sau în engleză "AC", care provine de la *Alternating Current*.



(a) (b) (c)

Figura 1 - (a) Mărime alternativă sinusoidală; (b) Mărime alternativă nesinusoidală; (c) Mărime continuă.

Marele avantaj al alimentării în c.a. (AC), în comparație cu curentul continuu (c.c., DC-*Direct Current*), în cazul căruia mărimile sunt constante în timp, îl constituie randamentul transportului energiei, care se poate face la tensiuni mult mai mari; tensiunea alternativă este produsă în centrale şi apoi ridicată prin intermediul transformatoarelor, reducându-se, aproximativ în aceeaşi măsură, curentul; rezultă că pierderile Joule RI^2, sunt mai mici la înaltă tensiune, acesta fiind motivul pentru care energia electrică este transportată la tensiuni mult mai mari decât este produsă. Acesta este principalul motiv pentru care sistemele de c.a. (AC) s-au impus față de sistemele de c.c. (DC).

2. Definiții

O mărime alternativă sinusoidală, $x(t)$, poate fi descrisă de expresia matematică:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$$

în care $x(t)$ este **valoarea instantanee**, X_M este **amplitudinea** sau **valoarea maximă**, $(\omega t + \varphi)$ este **faza**, ω este **pulsația** ce se exprimă în radiani/secundă $[rad/s]$, iar φ este **faza inițială**, exprimată în radiani.

Pulsația poate fi exprimată în funcție de **frecvența** f a semnalului, exprimată în [Hz]: $\omega = 2\pi f$

Frecvența se poate exprima în funcție de perioada T a semnalului prin:

$$f = \frac{1}{T}$$

Toți parametrii unei mărimi sinusoidale sunt reprezentați grafic în figura următoare

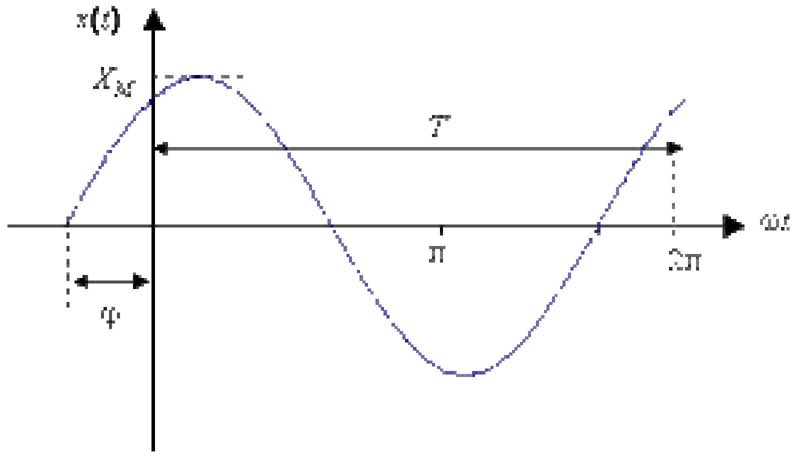
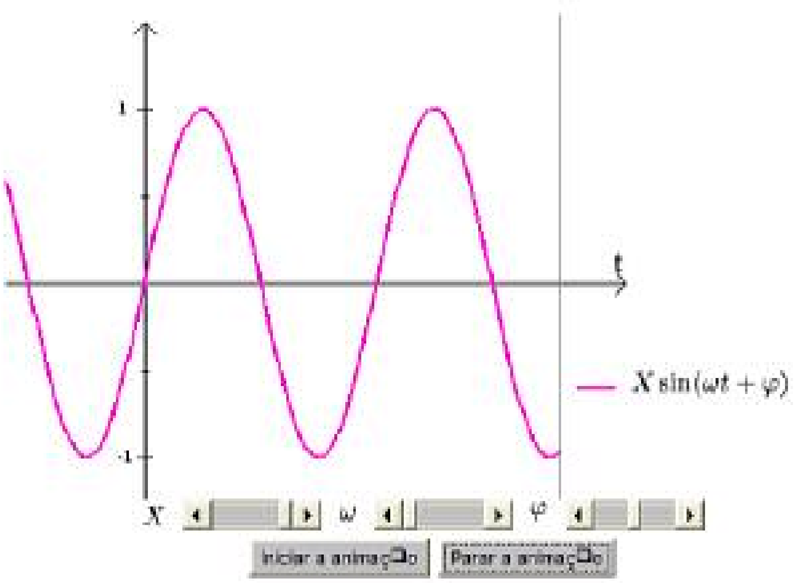


Figura 2 - Reprezentarea grafică a unei mărimi sinusoidale



Considerând două mărimi sinusoidale, de frecvență egală, descrise de expresiile:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{şi} \qquad y(t) = Y_M \sin(\omega t + \gamma),$$

se numeşte **defazaj** între cele două mărimi, diferența fazelor inițiale, $(\varphi - \gamma)$.

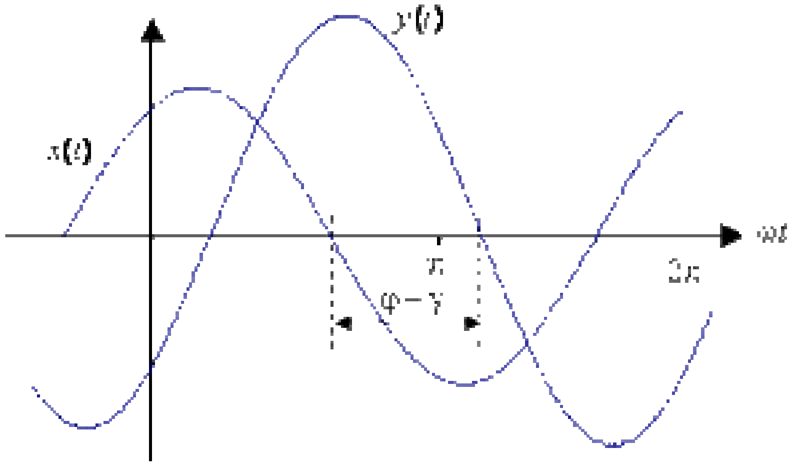


Figura 3 - Reprezentarea grafică a defazajului între două mărimi sinusoidale

Pentru exemplul dat, se spune că mărimea $x(t)$ este în faţă cu $(\psi - \gamma)$ radiani, faţă de $y(t)$. Reciproc, mărimea $y(t)$ este în urmă cu $(\psi - \gamma)$ radiani, faţă de mărimea $x(t)$.

3. Valoarea efectivă

Conceptul de valoare efectivă (eficace) a unei tensiuni sau curent alternativ sinusoidal, este legat de puterea transferată de aceste mărimi; cu alte cuvinte, prin intermediul valorilor efective, puterile asociate mărimilor de c.a. (AC) pot fi comparate, ca şi cele asociate mărimilor de c.c. (DC).

Din punct de vedere fizic, **valoarea efectivă** a unui curent alternativ, este valoarea unui curent continuu care produce, pe o aceeaşi rezistenţă, acelaşi efect termic, ca şi curentul alternativ care o parcurge.

Matematic, valoarea efectivă, X_{ef}, a unei mărimi periodice $x(t)$ este dată de:

$$X_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (x(t))^2\,dt}$$

În cazul particular al unei mărimi alternative sinusoidale date de $x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$, expresia anterioară conduce la:

$$X_{ef} = \frac{X_M}{\sqrt{2}}$$

Se poate scrie deci:

$$x(t) = \sqrt{2}\, X_{ef} \sin(\omega t + \varphi)$$

Din punct de vedere grafic, valoarea efectivă este proporţională cu aria mărginită de curba ce reprezintă evoluţia în timp a pătratului mărimii alternative, aşa cum se vede în figura următoare.

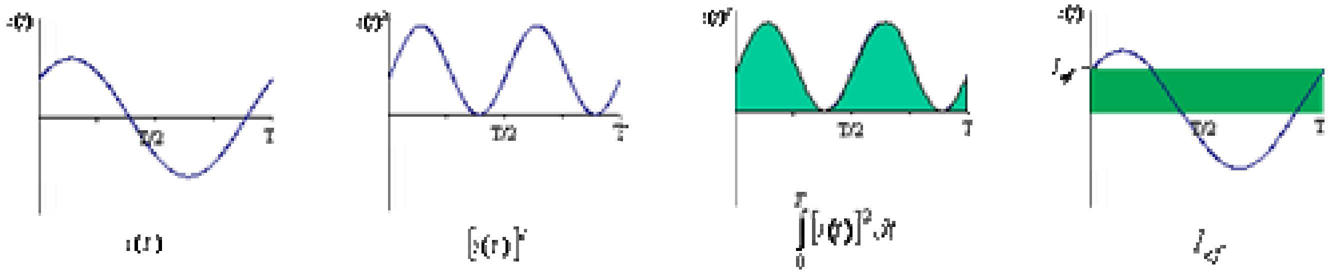


Figura 4 - Reprezentarea grafică a calculului valorii efective

Valoarea efectivă a unei mărimi depinde de amplitudinea mărimii, de forma de undă a acesteia, dar nu depinde de frecvența acesteia, nici de faza inițială (integrarea se face pe **o perioadă**, indiferent cât este valoarea acesteia, sau alegerea ei).

4. Notații în complex

Notația în complex, este o formă de reprezentare a mărimilor alternative sinusoidale, cu ajutorul unor vectori care variază în timp (vectori / fazori rotitori). Notația în complex a fost introdusă de Steinmetz, în 1893, în scopul simplificării analizei regimului permanent al circuitelor alimentate în c.a. (AC).

Se doreşte să se determine vectorul reprezentativ al tensiunii descrise de $u(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi)$.

Pornind de la funcția lui Euler

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha,$$

în care j reprezintă unitate pe axa imaginară, se poate scrie:

$$e^{j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi).$$

Multiplicând ambii membrii ai expresiei cu U_M, se obține:

$$U_M e^{j(\omega t + \varphi)} = U_M \cos(\omega t + \varphi) + jU_M \sin(\omega t + \varphi)$$

care va fi numit **vector (fazor) rotitor**, fiind reprezentat de:

$$\overline{U}_M(t) = U_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Comparând expresia lui $\overline{U}_M(t)$ cu evoluția temporală a semnalului $u(t)$, se poate concluziona că $u(t)$ corespunde părții imaginare a lui $\overline{U}_M(t)$. Matematic, se poate scrie:

$$u(t) = \mathrm{Im}\left\{U_M e^{j(\omega t + \varphi)}\right\}$$

Ştiind că

$$U_M e^{j(\omega t + \varphi)} = U_M e^{j\varphi} e^{j\omega t},$$

un număr complex $\overline{U}_M(t)$ poate fi reprezentat în planul complex ca un vector, care pentru $t=0$, are valoarea $U_M e^{j\varphi}$ şi se roteşte în timp, cu viteza unghiulară ω (corespunzător multiplicării cu $e^{j\omega t}$)

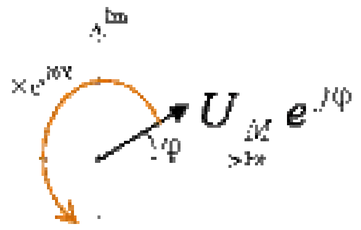
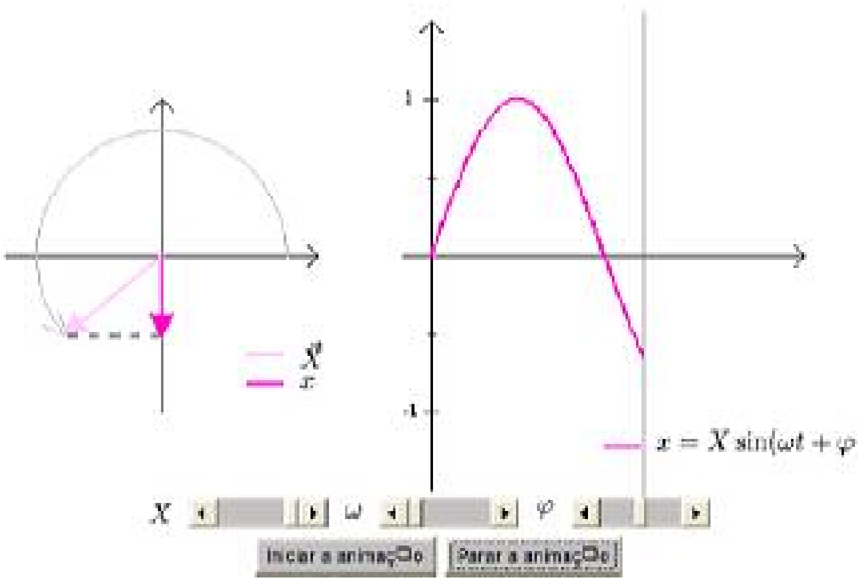


Figura 5 - Reprezentare grafică a unui vector (fazor) rotitor

Un vector $U_M e^{j\varphi}$ se defineşte prin **amplitudinea complexă** $\overline{U}_M(t)$

Din punct de vedere grafic, o tensiune descrisă de $u(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi)$ va fi, în orice moment, proiecția lui $\overline{U}_M(t)$ pe axa imaginară.



5. Operații matematice cu mărimi exprimate în complex

Adunarea a două mărimi sinusoidale de aceeaşi pulsație (frecvență)

Fiind date două mărimi sinusoidale descrise de:

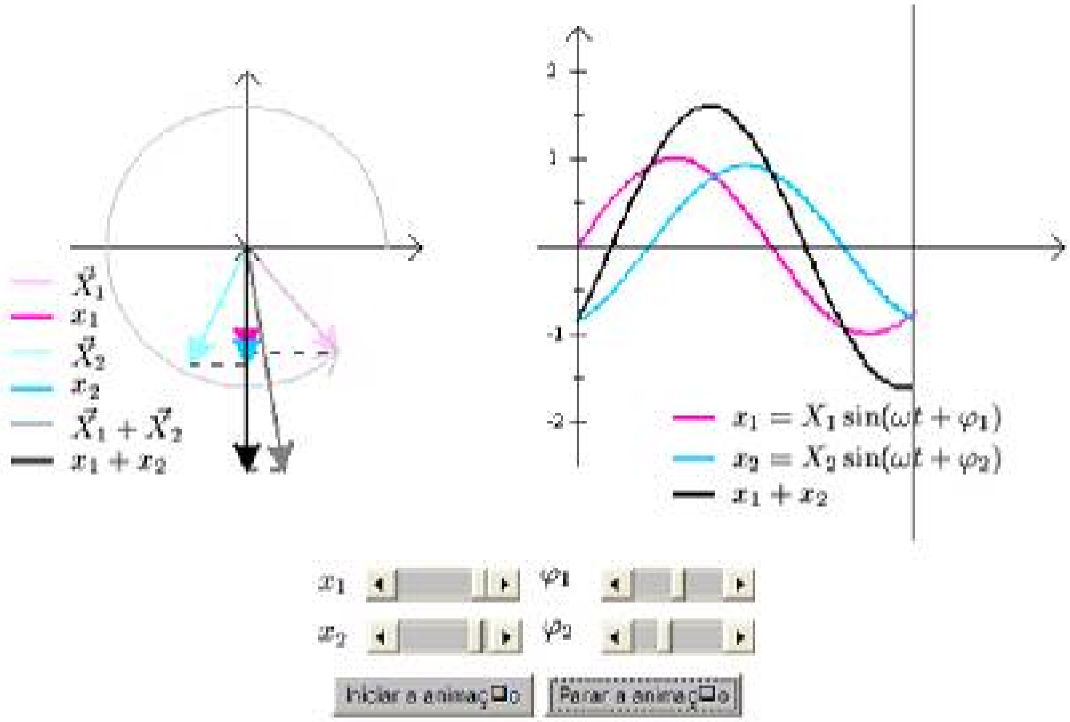
$$x_1(t) = X_{M1} \sin(\omega t + \varphi_1) \qquad \text{şi} \qquad x_2(t) = X_{M2} \sin(\omega t + \varphi_2),$$

analitic, suma lor va fi dată de:

$$x_1(t) + x_2(t) = X_{M1} \sin(\omega t + \varphi_1) + X_{M2} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Dacă cele două mărimi se reprezintă cu ajutorul vectorilor rotitori corespunzători, suma lor va fi dată de suma celor doi vectori; evoluția temporală a sumei, corespunde părții imaginare a sumei vectorilor:

$$x_1(t) + x_2(t) = \mathrm{Im}\{\overline{X}_{M1}(t) + \overline{X}_{M2}(t)\}$$



Multiplicarea unei mărimi sinusoidale cu o constantă reală

Dată fiind o mărime sinusoidală descrisă de:

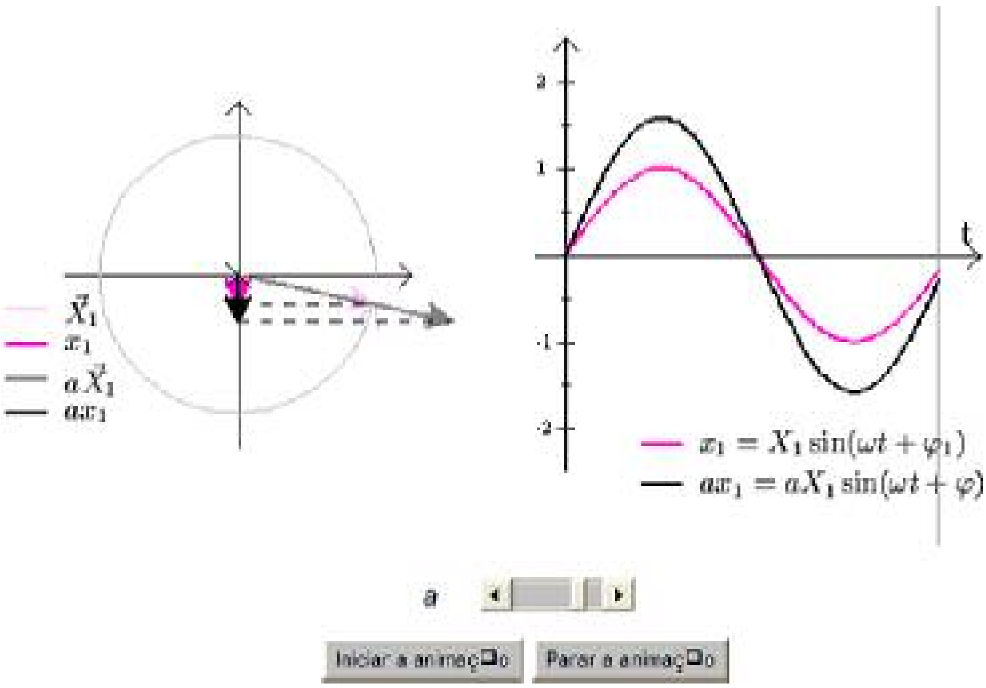
$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi),$$

analitic, multiplicarea sa cu o constantă reală K conduce la:

$$K\,x(t) = K\,X_M \sin(\omega t + \varphi)$$

Dacă mărimea se reprezintă cu ajutorul vectorului rotitor corespunzător, multiplicarea sa cu K conduce la un vector colinear cu $\overline{X}_M(t)$, dar al cărui modul este $K\,X_M$; evoluția temporală a semnalului $K\,x(t)$ corespunde părții imaginare a vectorului:

$$K\,x(t) = \mathrm{Im}\{K\,\overline{X}_M(t)\} = \mathrm{Im}\{K\,X_M e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$



Produsul a două mărimi sinusoidale de aceeaşi pulsație (frecvență)

Fiind date două mărimi sinusoidale descrise de:

$$x_1(t) = X_{M1}\sin(\omega t + \varphi_1) \qquad \text{şi} \qquad x_2(t) = X_{M2}\sin(\omega t + \varphi_2)$$

analitic, produsul lor este dat de:

$$x_1(t)\cdot x_2(t) = X_{M1}X_{M2}\sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2)$$

Dacă cele două mărimi se reprezintă cu ajutorul vectorilor rotitori corespunzători, produsul lor va fi reprezentat de un vector cu faza $(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$, care se roteşte cu viteză unghiulară dublă şi având modulul $X_{M1}\cdot X_{M2}$; evoluția temporală a produsului corespunde părții imaginare a vectorului:

$$x_1(t)\cdot x_2(t) = \mathrm{Im}\left\{\overline{X}_{M1}(t)\cdot\overline{X}_{M2}(t)\right\} = \mathrm{Im}\left\{X_{M1}\cdot X_{M2}e^{j(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)}\right\}$$

ANIMAȚIE

Derivarea unei mărimi sinusoidale

Dată fiind o mărime sinusoidală descrisă de:

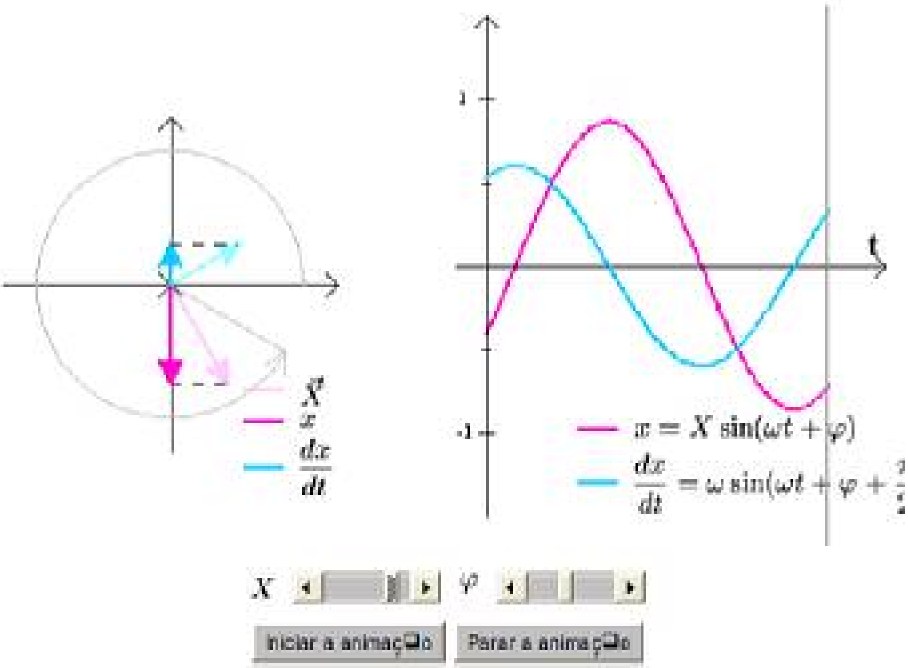
$$x(t) = X_M\sin(\omega t + \varphi),$$

analitic, derivata sa este dată de:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \omega X_M\cos(\omega t + \varphi) = \omega X_M\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dacă mărimea se reprezintă cu ajutorul vectorului rotitor corespunzător, derivata sa va fi reprezentată de un vector având faza $(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$, fiind deci în avans relativ cu $\frac{\pi}{2}$ față de $x(t)$, şi modulul ωX_M; evoluția temporală a derivatei corespunde părții imaginare a vectorului:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{Im}\left\{\frac{d\overline{X}_M(t)}{dt}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{d}{dt}\left(X_M e^{j(\omega t+\varphi)}\right)\right\} = \mathrm{Im}\left\{j\omega X_M e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\omega X_M e^{j(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})}\right\}$$



Integrarea unei mărimi sinusoidale

Dată fiind o mărime sinusoidală descrisă de:

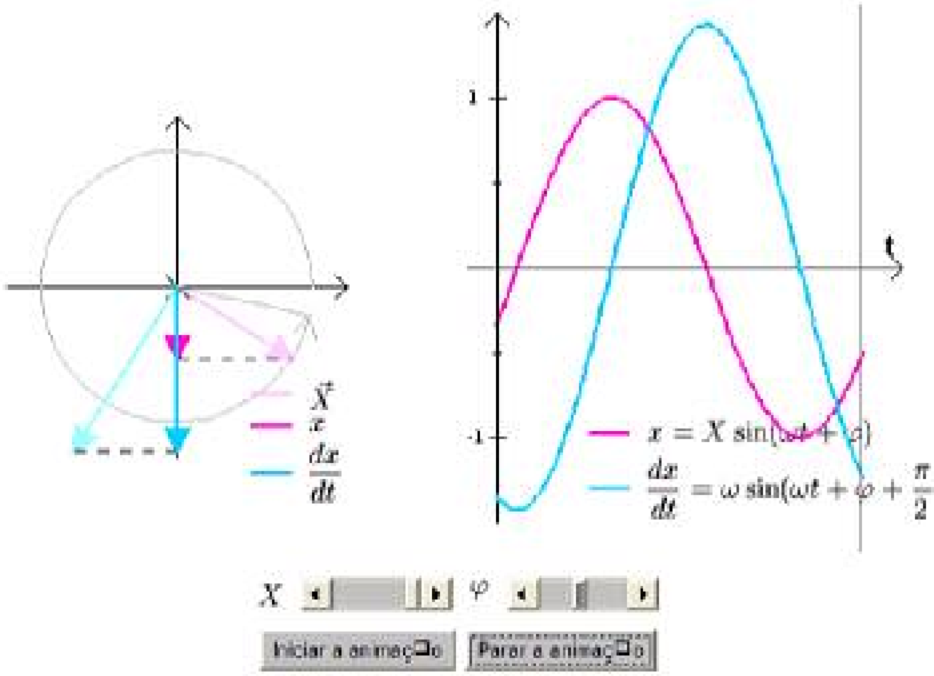
$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$$

analitic, integrala sa este dată de:

$$\int x(t)dt = -\frac{X_M}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) = \frac{X_M}{\omega}\sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Dacă mărimea se reprezintă cu ajutorul vectorului rotitor corespunzător, integrala sa va fi reprezentată de un vector având faza $(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$, fiind deci în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ față de $x(t)$, şi modulul $\frac{X_M}{\omega}$; evoluția temporală a integralei corespunde părții imaginare a vectorului:

$$\int x(t)dt = \mathrm{Im}\left\{\int \overline{X}_M(t)dt\right\} = \mathrm{Im}\left\{\int \left(X_M e^{j(\omega t+\varphi)}\right)dt\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{X_M}{j\omega} e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{X_M}{\omega} e^{j(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})}\right\}$$



$\vec{X}$
x
$\frac{dx}{dt}$
1
-1
t
$x = X \sin(\omega t + \varphi)$
$\frac{dx}{dt} = \omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$
X
φ
Iniciar a animaç□o
Parar a animaç□o