e-LEE
e-Learning tools for Electrical Engineering

Circuite în regim sinusoidal

Tematica: *Circuite electrice*
→ ***Capitol:*** *Analiza circuitelor lineare*
→ ***Secțiunea:***

Tip resursă: ☒ *Expunere* ☐ *Laborator virtual / Exercițiu* ☐ *CVR*

În acest capitol se va realiza analiza, în regim permanent, a circuitelor alimentate în curent alternativ. Se vor deduce ecuațiile caracteristice ale elementelor ideale R, L şi C în funcție de amplitudinile în complex şi se va prezenta conceptul de impedanță complexă. Se vor analiza circuitele RL serie şi RC serie, determinându-se tensiunile şi curenții prin metoda amplitudinilor complexe. Generalizarea conectării impedanțelor se va face prin deducerea din conectarea rezistențelor.

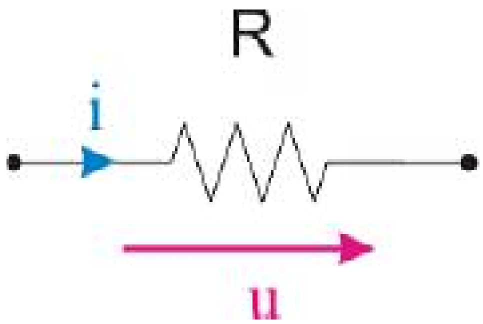
- cunoştințe anterioare necesare: Mărimi sinusoidale
- nivel: 1 - introductiv
- durata estimată: 30 minute
- autor: Maria José Resende
- realizare: Sophie Labrique
- traducere: Sergiu Ivanov

Resursă realizată cu sprijin financiar din partea Comunității Europene. Documentul de față nu angajează decât responsabilitatea autorului(rilor) lui. Comisia îşi declină orice responsabilitate ce ar putea decurge din utilizarea lui.

1. Elemente ideale

REZISTOR

Se consideră un rezistor, pentru care sensurile de referință ale tensiunii şi curentului sunt cele reprezentate în figura următoare.



Considerând că rezistorul este parcurs de un curent alternativ sinusoidal, a cărui expresie este:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi),$$

aplicând ecuația caracteristică a rezistențelor, $u = Ri$, se poate determina tensiunea între bornele sale:

$$u(t) = R\,i(t) = R I_M \sin(\omega t + \varphi) = U_M \sin(\omega t + \varphi)$$

Rezultă că tensiunea între bornele unui rezistor este o mărime alternativă sinusoidală, de pulsație ω, care este în fază cu curentul $i(t)$ şi care are amplitudinea egală cu $R I_M$.

În notație complexă, fazorul rotitor ce reprezintă curentul $i(t)$ este:

$$\bar{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

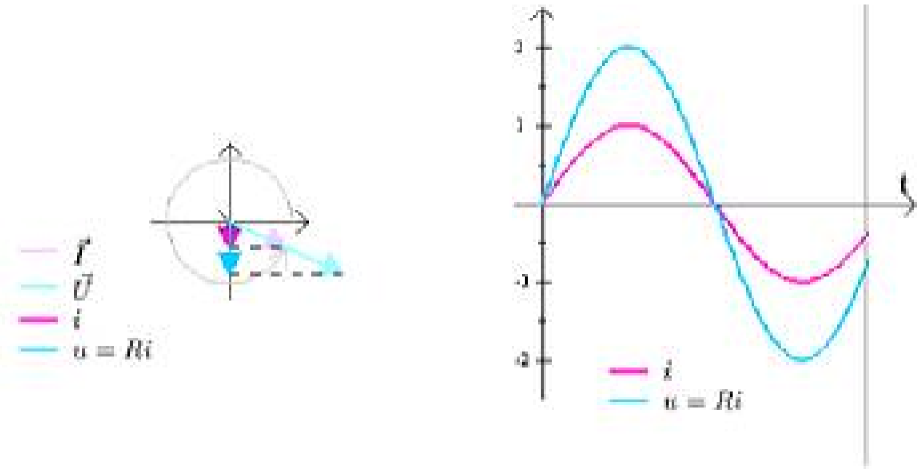
şi, pe baza ecuației caracteristice, fazorul rotitor al tensiunii, $\bar{U}_M(t)$, va fi:

$$\bar{U}_M(t) = R\,I_M e^{j(\omega t + \varphi)} = U_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Fazorul rotitor al tensiunii va avea aceeaşi viteză unghiulară ca şi $\bar{I}_M(t)$ şi este coliniar cu acesta; evoluția în timp a tensiunii $u(t)$ se obține proiectând acest fazor pe axa imaginară.

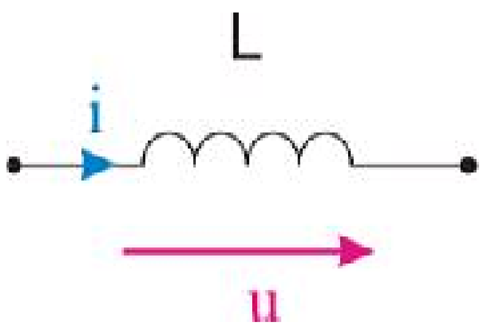
Doar pentru un rezistor, tensiunea la bornele sale şi curentul ce îl parcurge, sunt în fază.

În figura următoare este reprezentată evoluția temporală şi diagrama fazorială a tensiunii la borne şi curentului în cazul unui rezistor.



INDUCTANȚĂ

Se consideră o inductanță, pentru care sensurile de referință ale tensiunii şi curentului sunt cele reprezentate în figura următoare.



Considerând că inductanța este parcursă de un curent alternativ sinusoidal, a cărui expresie este:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi)$$

aplicând ecuația caracteristică a inductanțelor, $u = L\frac{di}{dt}$ se poate determina tensiunea între bornele sale:

$$u(t) = L\frac{d}{dt}\left[\, I_M \sin\,(\omega t + \varphi)\,\right]$$
$$= \omega L I_M \sin\,(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$
$$= U_M \sin\,(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Rezultă că tensiunea între bornele unei inductanțe este o mărime alternativă sinusoidală, de pulsație ω, care este în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de curentul $i(t)$ şi care are amplitudinea egală cu $\omega L I_M$.

În notație complexă, fazorul rotitor ce reprezintă curentul $i(t)$ este:

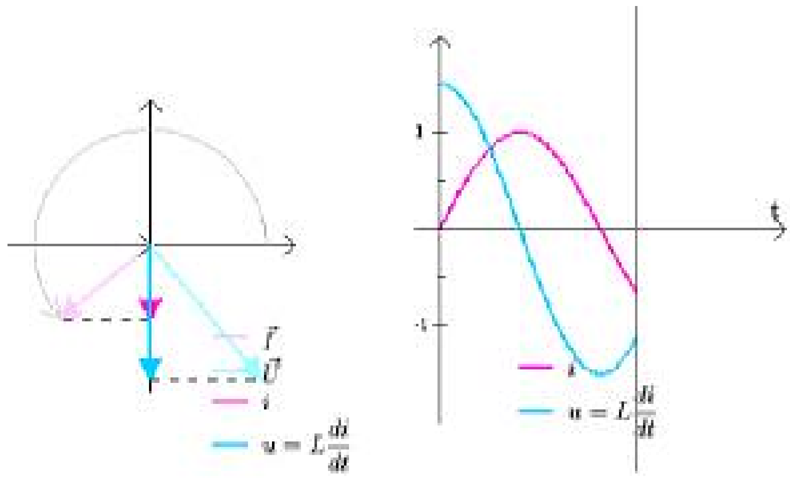
$$\bar{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

şi, pe baza ecuației caracteristice, fazorul rotitor al tensiunii, $\bar{U}_M(t)$ va fi:

$$\bar{U}_M(t) = L\frac{d}{dt}\left[I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \right]$$
$$= j\omega L I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$
$$= \omega L I_M e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$
$$= U_M e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

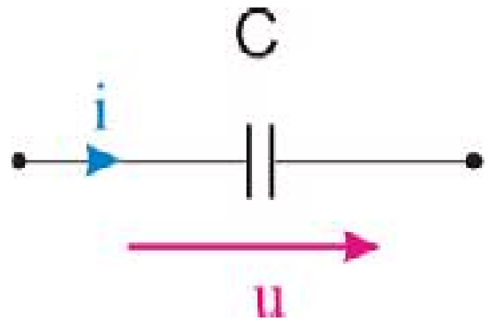
Fazorul rotitor al tensiunii va avea aceeaşi viteză unghiulară ca şi $\bar{I}_M(t)$, fiind în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de acesta; evoluția în timp a tensiunii $u(t)$ se obține proiectând acest fazor pe axa imaginară.

În figura următoare este reprezentată evoluția temporală şi diagrama fazorială a tensiunii la borne şi curentului în cazul unei inductanțe.



CONDENSATOR

Se consideră un condensator, pentru care sensurile de referință ale tensiunii și curentului sunt cele reprezentate în figura următoare.



Considerând că acesta este parcurs de un curent alternativ sinusoidal, a cărui expresie este:

$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \varphi)$$

aplicând ecuația caracteristică a condensatoarelor, $i = C\frac{du}{dt}$ se poate determina tensiunea între bornele sale:

$$u(t) = \frac{1}{C}\int\left[I_M \sin(\omega t + \varphi)\right]dt$$
$$= \frac{I_M}{\omega C}\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= I_M \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Rezultă că tensiunea între bornele unui condensator este o mărime alternativă sinusoidală, de pulsație ω, care este în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ față de curentul $i(t)$ și care are amplitudinea egală cu $\frac{I_M}{\omega C}$.

În notație complexă, fazorul rotitor ce reprezintă curentul $i(t)$ este:

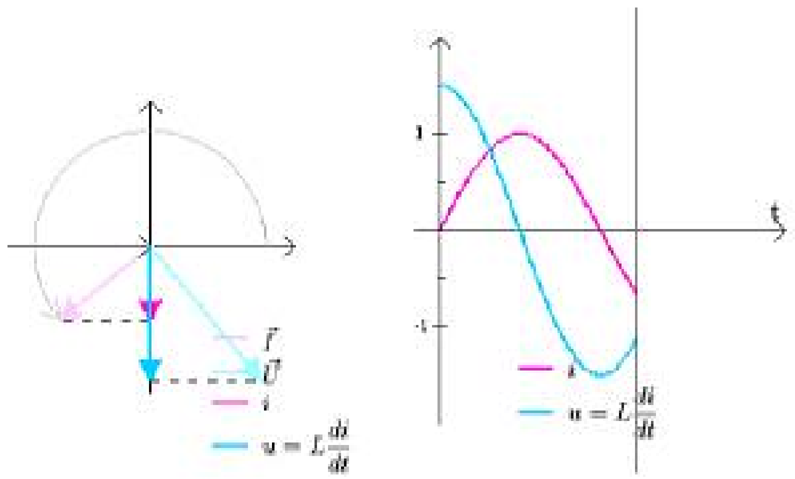
$$\bar{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

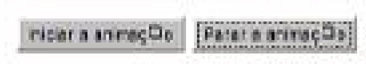
și, pe baza ecuației caracteristice, fazorul rotitor al tensiunii, $\bar{U}_M(t)$ va fi:

$$\bar{U}_M(t) = \frac{1}{C}\int\left[I_M e^{j(\omega t + \varphi)}\right]dt$$
$$= \frac{1}{j\omega C} I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$
$$= \frac{1}{\omega C} I_M e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}$$
$$= U_M e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}$$

Fazorul rotitor al tensiunii va avea aceeaşi viteză unghiulară ca şi $\bar{I}_M(t)$ fiind în avans cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de acesta; evoluţia în timp a tensiunii $u(t)$ se obţine proiectând acest fazor pe axa imaginară.

În figura următoare este reprezentată evoluţia temporală şi diagrama fazorială a tensiunii la borne şi curentului în cazul unui condensator.





2. Impedanţa complexă

Utilizând notaţia în complex şi considerând că fazorul rotitor al curentului care parcurge unul din elemente este reprezentat de expresia:

$$\bar{I}_M(t) = I_M e^{j(\omega t+\varphi)},$$

în secţiunea anterioară, s-au obţinut următoarele expresii pentru fazorii rotitori ai tensiunilor, pentru rezistor, inductanţă, respectiv condensator:

Rezistor	Inductanţă	Condensator
$\bar{U}_M(t) = R I_M e^{j(\omega t+\varphi)}$	$\bar{U}_M(t) = j\omega L I_M e^{j(\omega t+\varphi)}$	$\bar{U}_M(t) = \frac{1}{j\omega C} I_M e^{j(\omega t+\varphi)}$

Ţinând cont de expresia lui $\bar{I}_M(t)$, expresiile de mai sus pot fi scrise sub forma:

Rezistor	Inductanţă	Condensator

$\overline{U}_M(t) = R\,\overline{I}_M(t)$	$\overline{U}_M(t) = j\omega L\,\overline{I}_M(t)$	$\overline{U}_M(t) = \dfrac{1}{j\omega C}\,\overline{I}_M(t)$

Se defineşte **impedanţa complexă,** $\overline{Z}$, ca fiind raportul dintre fazorii rotitori ai tensiunii şi curentului:

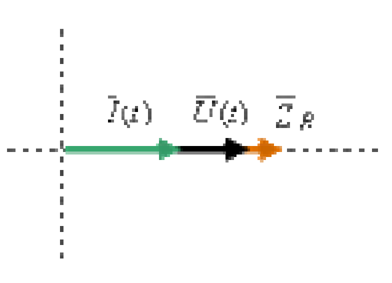
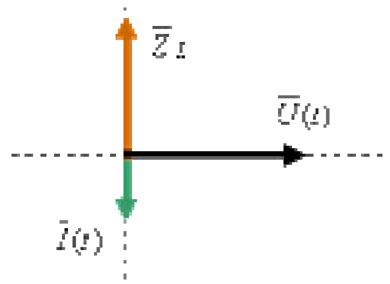
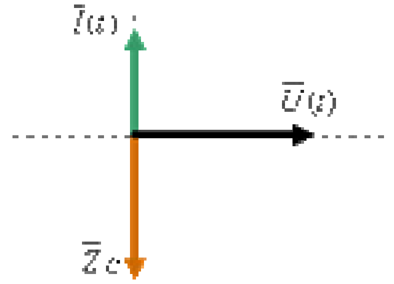
$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}_M}{\overline{I}_M}$$

Explicitând impedanța complexă în cazul elementelor R, L şi C, se obțin:

Rezistor	Inductanță	Condensator
$\overline{Z}_R = R = R\,e^{j0}$	$\overline{Z}_L = j\omega L = \omega L\,e^{j\frac{\pi}{2}}$	$\overline{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{1}{\omega C}\,e^{-j\frac{\pi}{2}}$

Impedanța complexă se exprimă în Ohm $[\Omega]$

Amplitudinile şi impedanțele complexe pot fi reprezentate fazorial, pentru fiecare din elementele analizate.

Rezistor	Inductanță	Condensator
		

De notat faptul că impedanța complexă este un fazor rotitor, fiind reprezentată ca orice mărime alternativă sinusoidală.

Aceasta se justifică, deoarece impedanța inductanțelor şi condensatoarelor se modifică în funcție de frecvența tensiunii de alimentare a circuitului, spre deosebire de impedanța unei rezistențe, care rămâne constantă ca valoare.

Deoarece tensiunea la borne şi curentul sunt alternative, de aceeaşi pulsație ω, termenul $e^{j\omega t}$ se poate neglija în scrierea ecuațiilor caracteristice ale elementelor, sub formă fazorială, simplificându-se astfel notația. În ecuațiile astfel scrise, nu mai apar termeni fazori rotitori, ci doar amplitudini complexe, ceea ce corespunde reprezentării fazorului rotitor la momentul $t = 0$.

Rezistor	Inductanță	Condensator
$\overline{U}_R = \overline{Z}_R\,\overline{I}_R$	$\overline{U}_L = \overline{Z}_L\,\overline{I}_L$	$\overline{U}_C = \overline{Z}_C\,\overline{I}_C$

3. Circuit RL serie

Se consideră un circuit RL serie, alimentat de la o sursă de tensiune alternativă sinusoidală, a cărei tensiune este descrisă de expresia $e(t) = E \sin(\omega t)$.

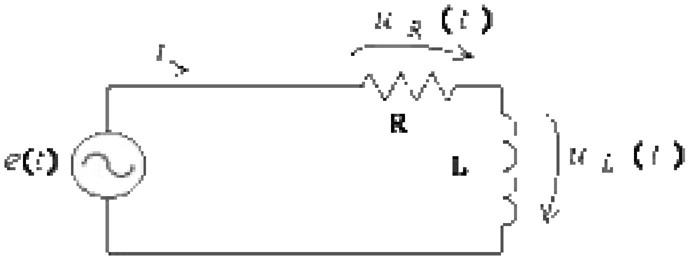


Figura 1 - Schema circuitului RL serie

Cunoscând valorile lui R şi L, se cere să se determine, în regim permanent, evoluția în timp a curentului din circuit, $i(t)$, tensiunea la bornele rezistorului, $u_R(t)$ şi la bornele inductanței, $u_L(t)$.

Aplicând Teorema a II-a a lui Kirchhoff, suma tensiunilor la bornele rezistorului şi inductanței, este egală cu tensiunea sursei:

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

Utilizând amplitudini complexe, relația de mai sus se scrie:

$$\begin{aligned} \overline{E} &= R\,\overline{I} + j\omega L\,\overline{I} \\ &= (R + j\omega L)\,\overline{I} \end{aligned}$$

în care $R + j\omega L$ reprezintă impedanța complexă a rezistenței înseriate cu inductanța.

Explicitând $\overline{I}$ din expresia anterioară, se obține:

$$\overline{I}(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\, e^{-j\varphi} \qquad \text{cu} \qquad \varphi = \operatorname{arctan} \frac{\omega L}{R} \qquad \text{şi} \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Diagrama fazorială a impedanțelor, amplitudinilor complexe ale tensiunii sursei şi curentului, este reprezentată în figura următoare.

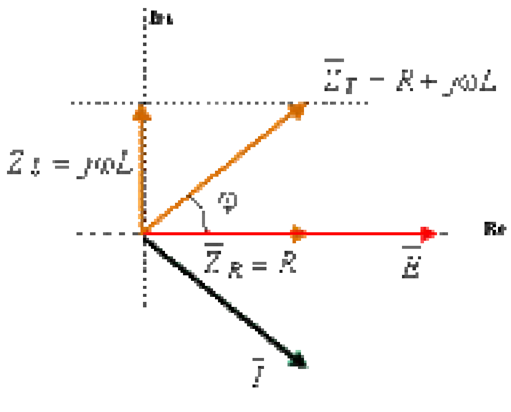


Figura 2 - Diagrama fazorială

Având calculat curentul, se pot calcula imediat tensiunile la bornele celor două elemente:

$$\overline{U}_R = R\,\overline{I} = \frac{R\,E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\,e^{-j\varphi}$$

Amplitudinea complexă $\overline{U}_R$ este colineară cu $\overline{I}$, ceea ce înseamnă că tensiunea la bornele rezistorului şi curentul ce îl străbate, sunt în fază.

În ceea ce priveşte tensiunea la bornele bobinei, se obține:

$$\overline{U}_L = j\omega L\,\overline{I} = \frac{\omega L\,E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\,e^{-j\varphi+\frac{\pi}{2}}$$

Amplitudinea complexă $\overline{U}_L$ este în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de $\overline{I}$, ceea ce înseamnă că tensiunea la bornele bobinei este în avans cu $\frac{\pi}{2}$ față de curentul ce o parcurge.

Diagrama fazorială completă a tensiunilor şi curentului din circuit este reprezentată în figura următoare, în care se evidențiază Teorema a II-a a lui Kirchhoff: suma fazorilor $\overline{U}_L$ şi $\overline{U}_R$ este egală cu fazorul $\overline{E}$.

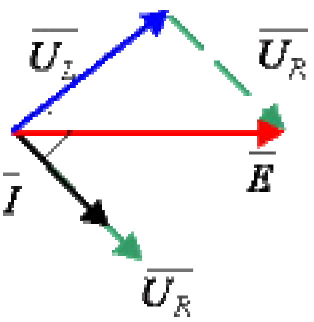


Figura 3 - Diagrama fazorială a circuitului RL serie

Pentru a obține expresiile evoluțiilor în timp ale mărimilor, trebuie să se determine fazorii rotitori corespunzători (multiplicarea amplitudinilor complexe cu $e^{j\omega t}$) şi să se proiecteze pe axa imaginară.

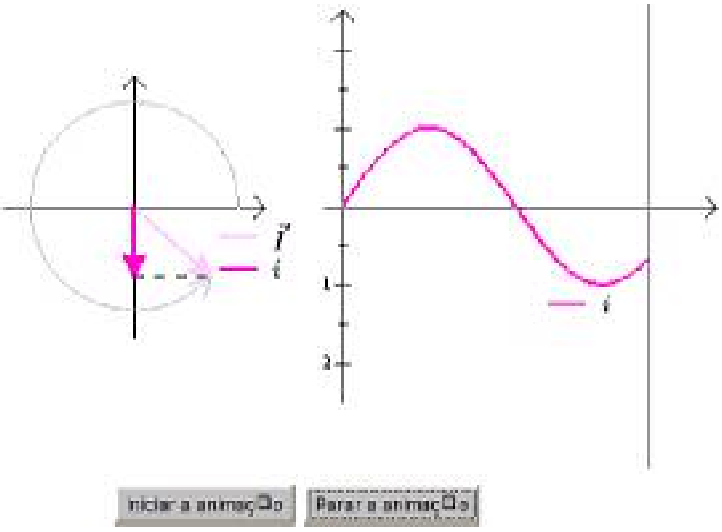
$$i(t) = \mathrm{Im}\{\overline{I}(t)\} = \frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t-\varphi)$$

$$u_R(t) = \mathrm{Im}\{\overline{U}_R(t)\} = \frac{R\,E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t-\varphi)$$

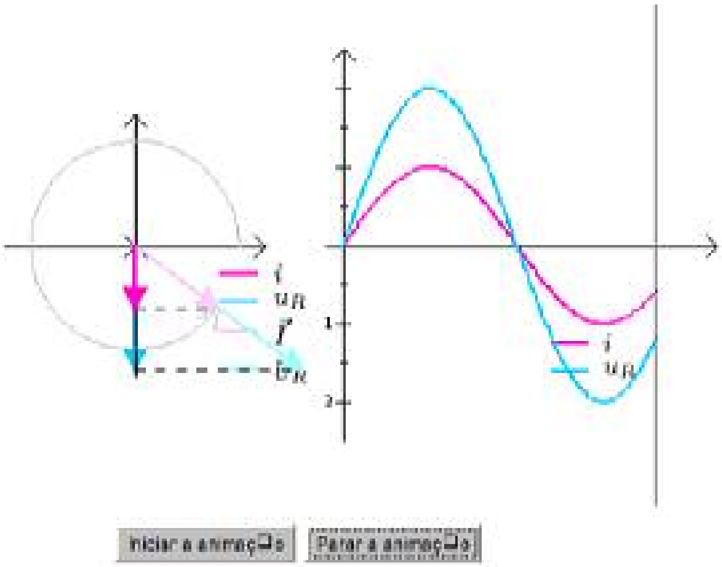
$$u_L(t) = \mathrm{Im}\{\overline{U}_L(t)\} = \frac{\omega L\,E}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin\left(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

cu $\varphi = \arctan \dfrac{\omega L}{R}$ și $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$

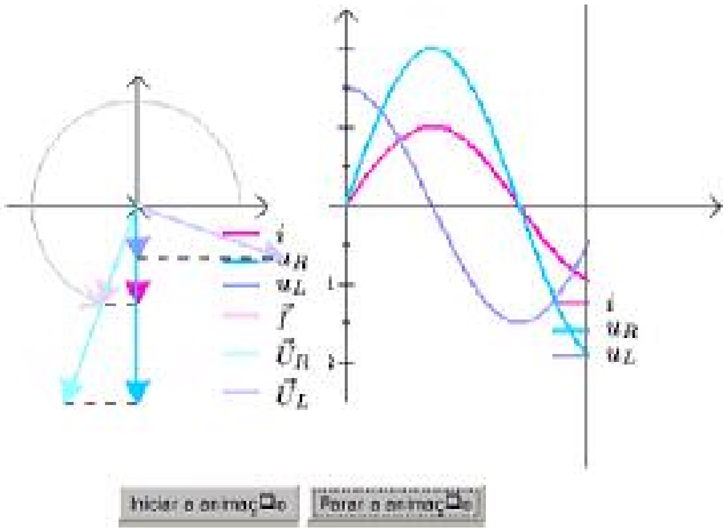
Expresiile de mai sus au fost obținute considerând că tensiune ce alimentează circuitul are faza inițială nulă. Ca exercițiu, să se rezolve același circuit RL serie, considerând că faza inițială a curentului din circuit, este nulă, respectiv, $i(t) = I \sin(\omega t)$, curent reprezentat de amplitudinea complexă $\overline{I}$.



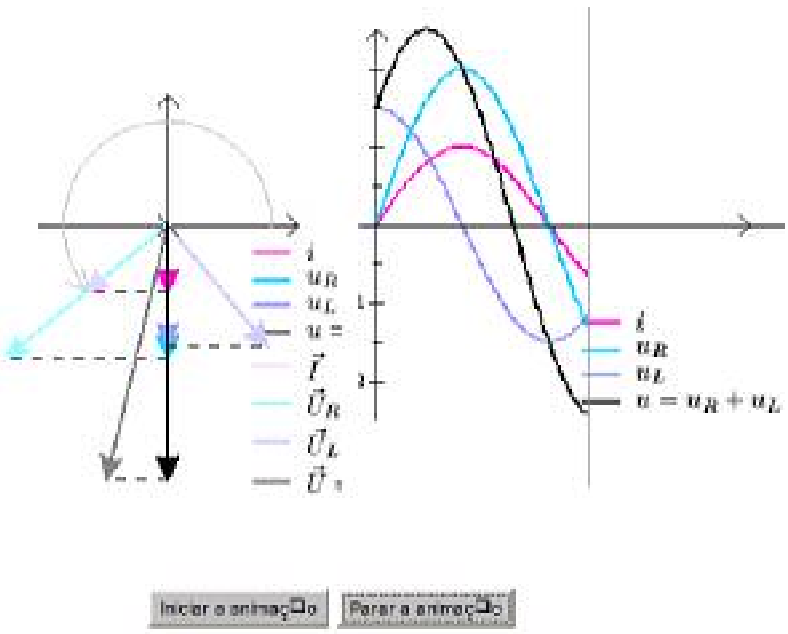
Amplitudinea complexă $\overline{U}_R$, care reprezintă tensiunea la bornele rezistorului, este colineară cu $\overline{I}$, ceea ce înseamnă că tensiunea la borne şi curentul aferente unui rezistor, sunt în fază.



În ceea ce priveşte amplitudinea complexă $\overline{U}_L$, ce reprezintă tensiunea la bornele inductanței, ea este în avans cu $\dfrac{\pi}{2}$ față de $\overline{I}$, ceea ce înseamnă că tensiunea la bornele unei inductanțe este în avans cu $\dfrac{\pi}{2}$ față de curentul ce o parcurge.



În final, diagramele vectorială şi temporală ce se obţin, sunt perfect echivalente cu cele corespunzătoare considerării tensiunii cu fază iniţială nulă; diferă doar momentul la care ne referim.



4. Circuit RC serie

Se consideră un circuit RC serie, alimentat de la o sursă de tensiune alternativă sinusoidală, a cărei tensiune este descrisă de expresia $e(t) = E \sin (\omega t)$.

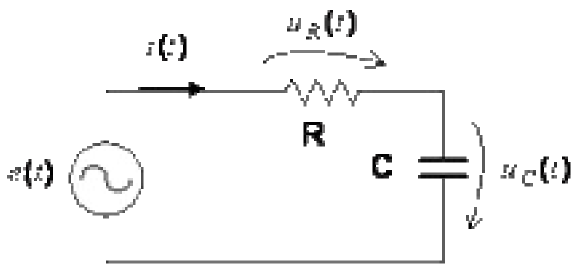


Figura 4 - Schema circuitului RC serie

Cunoscând valorile lui R şi C, se cere să se determine, în regim permanent, evoluţia în timp a curentului din circuit, $i(t)$, tensiunea la bornele rezistorului, $u_R(t)$ şi la bornele condensatorului, $u_C(t)$.

Aplicând Teorema a II-a a lui Kirchhoff, suma tensiunilor la bornele rezistorului şi condensatorului, este egală cu tensiunea sursei:

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

Utilizând amplitudini complexe, relaţia de mai sus se scrie:

$$\overline{E} = R\,\overline{I} + \frac{1}{j\omega C}\,\overline{I} = \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\overline{I}$$

în care $R - j\dfrac{1}{\omega C}$ reprezintă impedanţa complexă a rezistenţei înseriate cu condensatorul.

Explicitând $\overline{I}$ din expresia anterioară, se obţine:

$$\overline{I}(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}}\,e^{-j\varphi} \qquad \text{cu} \qquad \varphi = \operatorname{arctan}\frac{1}{\omega RC} \qquad \text{şi} \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

Diagrama fazorială a impedanţelor, amplitudinilor complexe ale tensiunii sursei şi curentului, este reprezentată în figura următoare.

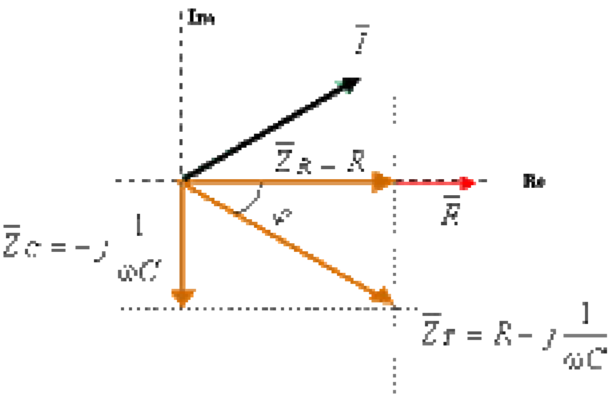


Figura 5 - Diagrama fazorială

Având calculat curentul, se pot calcula imediat tensiunile la bornele celor două elemente:

$$\overline{U}_R = R\,\overline{I} = \frac{R\,E}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}}\,e^{-j\varphi}$$

Amplitudinea complexă $\overline{U}_R$ este coliniară cu $\overline{I}$, ceea ce înseamnă că tensiunea la bornele rezistorului şi curentul ce îl străbate, sunt în fază.

În ceea ce priveşte tensiunea la bornele condensatorului, se obţine:

$$\overline{U}_C = -\frac{j}{\omega C}\overline{I} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} e^{-j\varphi - \frac{\pi}{2}}$$

Amplitudinea complexă $\overline{U}_C$ este în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de $\overline{I}$, ceea ce înseamnă că tensiunea la bornele condensatorului este în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de curentul ce îl parcurge.

Diagrama fazorială completă a tensiunilor şi curentului din circuit este reprezentată în figura următoare, în care se evidenţiază Teorema a II-a a lui Kirchhoff: suma fazorilor $\overline{U}_C$ şi $\overline{U}_R$ este egală cu fazorul $\overline{E}$.

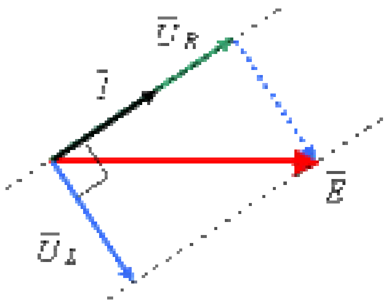


Figura 6 - Diagrama fazorială a circuitului RC serie

Pentru a obţine expresiile evoluţiilor în timp ale mărimilor, trebuie să se determine fazorii rotitori corespunzători (multiplicarea amplitudinilor complexe cu $e^{j\omega t}$) şi să se proiecteze pe axa imaginară.

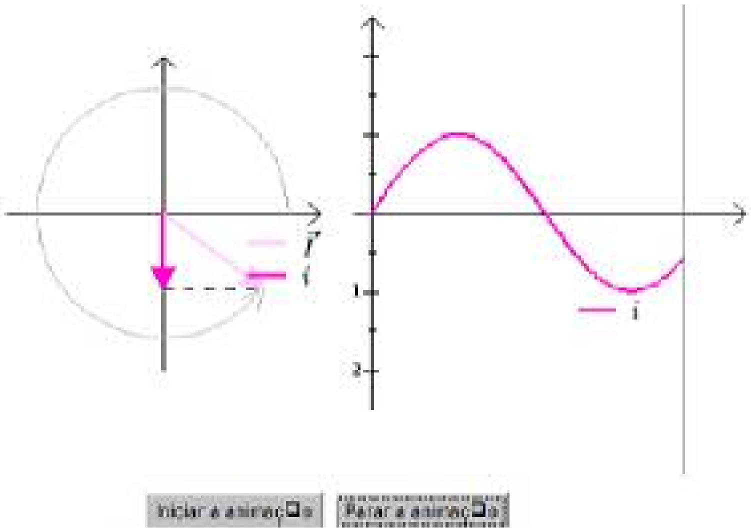
$$i(t) = \mathrm{Im}\{\overline{I}(t)\} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}\sin(\omega t - \varphi)$$

$$u_R(t) = \mathrm{Im}\{\overline{U}_R(t)\} = \frac{R\,E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}\sin(\omega t - \varphi)$$

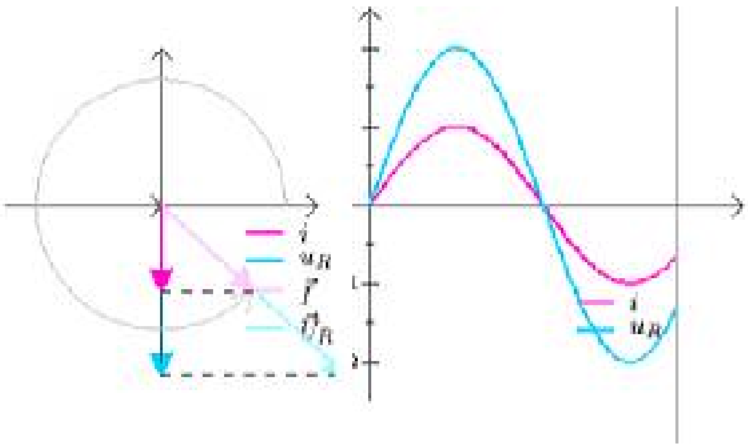
$$u_L(t) = \mathrm{Im}\{\overline{U}_L(t)\} = \frac{\omega L\,E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}\sin(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})$$

cu $\varphi = \arctan\frac{1}{\omega RC}$ şi $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$

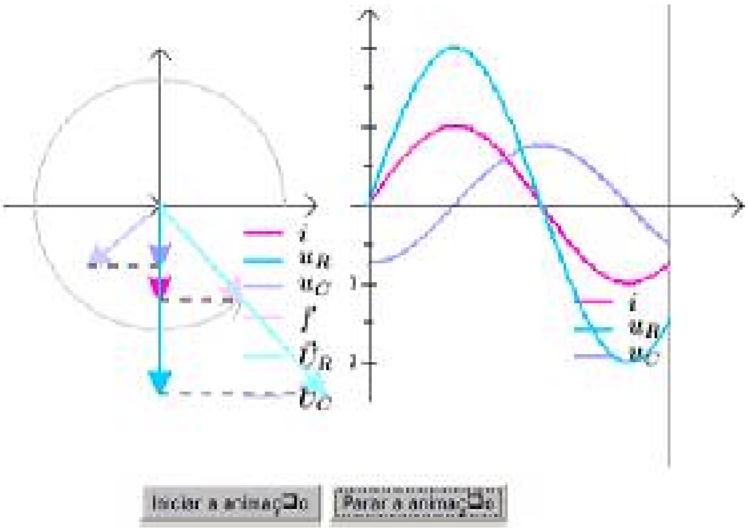
Expresiile de mai sus au fost obţinute considerând că tensiune ce alimentează circuitul are faza iniţială nulă. Ca exerciţiu, să se rezolve acelaşi circuit RC serie, considerând că faza iniţială a curentului din circuit, este nulă, respectiv, $i(t) = I \sin(\omega t)$, curent reprezentat de amplitudinea complexă $\bar{I}$.



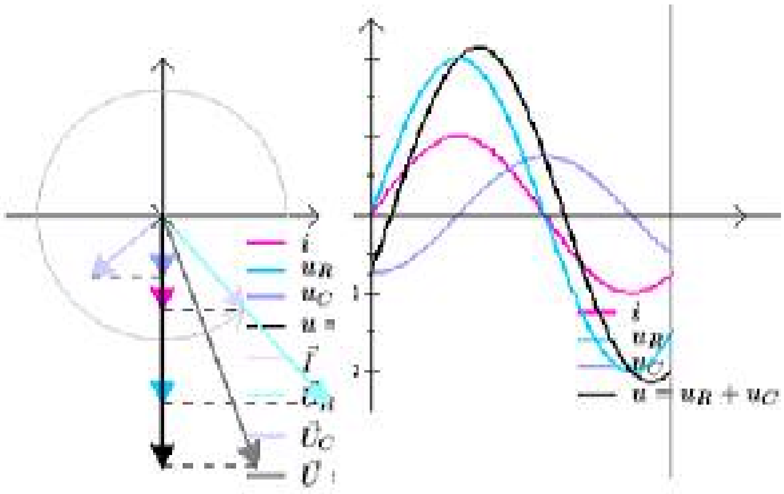
Amplitudinea complexă $\bar{U}_R$, care reprezintă tensiunea la bornele rezistorului, este colineară cu $\bar{I}$, ceea ce înseamnă că tensiunea la borne şi curentul aferente unui rezistor, sunt în fază.



În ceea ce priveşte amplitudinea complexă $\bar{U}_C$, ce reprezintă tensiunea la bornele condensatorului, ea este în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ față de $\bar{I}$, ceea ce înseamnă că tensiunea la bornele unui condensator este în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ față de curentul ce îl parcurge.

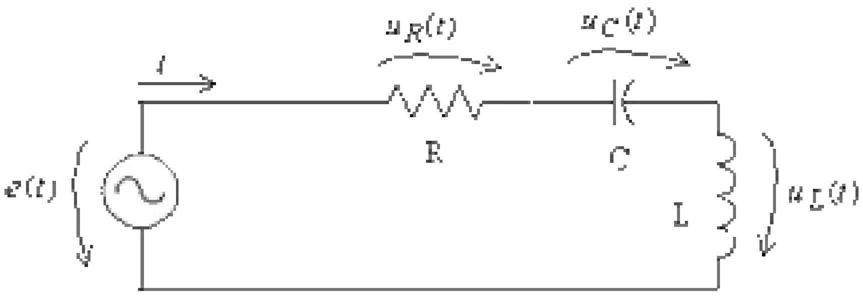


În final, diagramele vectorială şi temporală ce se obţin, sunt perfect echivalente cu cele corespunzătoare considerării tensiunii cu fază inițială nulă; diferă doar momentul la care ne referim.



Exerciții

1. Se consideră un circuit serie RLC, reprezentat în figura de mai jos. Sursa de tensiune alternativă are valoarea eficace de $E_{ef} = 230\ \text{V}$ şi frecvența $f = 50\ \text{Hz}$. Se consideră: $R = 100\ \Omega$, $L = 316\ \text{mH}$ şi $C = 318\ \mu\text{F}$.



Determinați valorile eficace ale tensiunilor şi curentului din circuit. Reprezentați aceste mărimi într-o diagramă fazorială, evidențiind bilanțul tensiunilor exprimat de Teorema a II-a a lui Kirchhoff.

Răspuns >>

Impedanța rezistenței $\overline{Z}_R = \mathbf{R}$

Impedanța bobinei $\overline{Z}_L = j\omega\mathbf{L}$

Impedanța condensatorului $\overline{Z}_C = -j\dfrac{1}{\omega\mathbf{C}}$

Deoarece aceste 3 impedanțe sunt în serie:

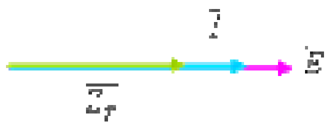
$\overline{Z}_T = \overline{Z}_R + \overline{Z}_C + \overline{Z}_L = \mathbf{R} - j\dfrac{1}{\omega\mathbf{C}} + j\omega\mathbf{L}$, respectiv $\overline{Z}_T = \mathbf{R} + j\left(\omega\mathbf{L} - \dfrac{1}{\omega\mathbf{C}}\right)$

În funcție de valoarea părții imaginare a impedanței, pot exista 3 cazuri:

Cazul 1

Partea imaginară a impedanței este nulă, $\omega\mathbf{L} - \dfrac{1}{\omega\mathbf{C}} = 0$, iar impedanța totală este pur rezistivă, $\overline{Z}_T = \mathbf{R}$.

Diagrama fazorială a tensiunii de alimentare şi a curentului care parcurge impedanța totală este de forma:

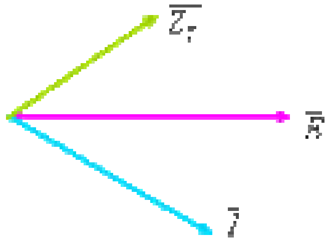


Față de bornele circuitului, acesta are un caracter **rezistiv**.

Cazul 2

Partea imaginară a impedanței este pozitivă, $\omega\mathbf{L}-\dfrac{1}{\omega\cdot\mathbf{C}}=\mathbf{X}>0$, rezultând că impedanța totală este rezistivă și inductivă, $\overline{Z}_T=\mathbf{R}+j\mathbf{X}$.

Diagrama fazorială a tensiunii de alimentare și a curentului care parcurge impedanța totală este de forma:

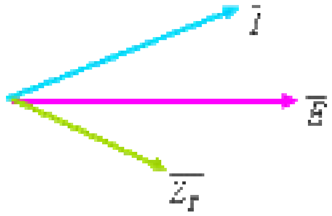


Față de bornele circuitului, acesta are un caracter rezistiv și **inductiv**.

Cazul 3

Partea imaginară a impedanței este negativă, $\omega\mathbf{L}-\dfrac{1}{\omega\cdot\mathbf{C}}=\mathbf{X}<0$, rezultând că impedanța totală este rezistivă și capacitivă, $\overline{Z}_T=\mathbf{R}-j\mathbf{X}$.

Diagrama fazorială a tensiunii de alimentare și a curentului care parcurge impedanța totală este de forma:



Față de bornele circuitului, acesta are un caracter rezistiv și **capacitiv**.

Pentru cazul concret al problemei, înlocuind valorile: $E_{cf}=230\ \mathrm{V}$, $f=50\ \mathrm{Hz}$, $R=10\,\Omega$, $C=318\ \mu\mathrm{F}$ și $L=316\ \mathrm{mH}$, se obține:

Pentru modulul impedanței totale

$$Z_T=\sqrt{10^2+\left(2\pi 50\times 316\times 10^{-3}-\frac{1}{2\pi 50\times 318\times 10^{-6}}\right)^2}=$$

$$= \sqrt{10^2 + (89)^2} \approx 90\ \Omega$$

iar pentru faza impedanței totale

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right) = \arctan\left(\frac{89}{10}\right) = 83^\circ$$

Impedanța totală compleză va fi deci:

$$\overline{Z_T} = 90\, e^{j83}\ \Omega$$

Amplitudinea complexă (valoarea eficace) a curentului este:

$$\bar{I}_{Ef} = \frac{\overline{E}_{Ef}}{\overline{Z}} = \frac{230\, e^{j0}}{90\, e^{j83}} \approx 2{,}6\, e^{-j83}\ A$$

Amplitudinea complexă (valoarea eficace) a tensiunii la bornele rezistenței este:

$$\overline{U_{R\,Ef}} = R\, \bar{I}_{Ef} = 10 \cdot 2{,}6\, e^{-j83} = 26\, e^{-j83}\ V$$

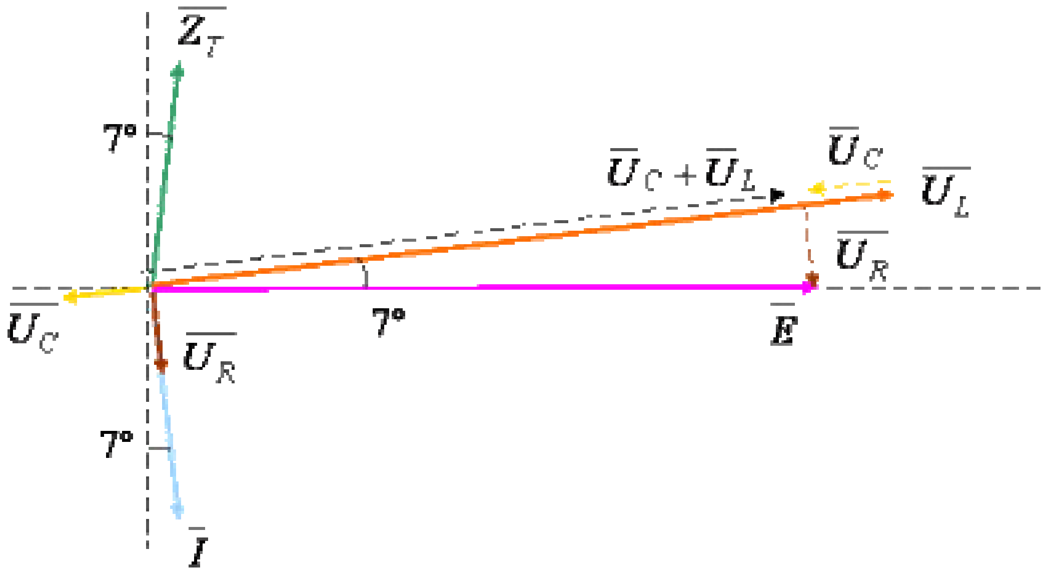
Amplitudinea complexă (valoarea eficace) a tensiunii la bornele inductanței este:

$$\overline{U_{L\,Ef}} = j\omega L\, \bar{I}_{Ef} = \omega L \cdot 1{,}7\, e^{j(90-83)} \approx 169\, e^{j7}\ V$$

Amplitudinea complexă (valoarea eficace) a tensiunii la bornele condensatorului este:

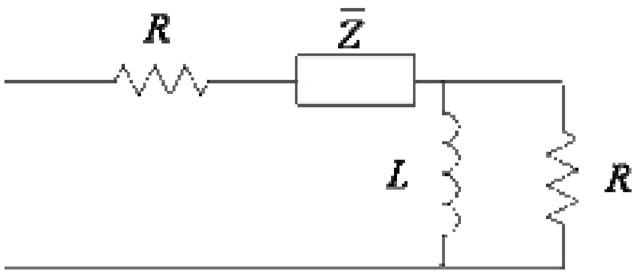
$$\overline{U_{C\,Ef}} = -j\frac{1}{\omega C}\, \bar{I}_{Ef} = \frac{1}{\omega C} \cdot 1{,}7\, e^{-j(83+90)} \approx 17\, e^{-j173}\ V$$

Diagrama fazorială a acestor mărimi este reprezentată în figura următoare, în care se evidențiază relația care există între tensiunile din circuit (Teorema a II-a a lui Kirchhoff)



---

2. Pentru circuitul reprezentat în figura de mai jos, în care $R = 2\Omega$, $L = 20\text{mH}$ şi $f = 50$ Hz, determinaţi impedanţa complexă $\overline{Z}$, ştiind că valoarea impedanţei totale la bornele circuitului este $7e^{j50}$.



Răspuns >>

Impedanţa complexă a rezistenţei este $\overline{Z}_R = R = 2$ şi, ţinând cont de frecvenţa tensiunii de alimentare a circuitului, impedanţa complexă a inductanţei este $\overline{Z}_L = j\omega L = 6,3\,e^{j90}$.

Notând cu $\overline{Z}_1$ impedanţa echivalentă a circuitului paralel format din $\overline{Z}_L$ şi $\overline{Z}_R$, se obţine:

$$\overline{Z}_1 = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = \frac{12,6\,e^{j90}}{6,6\,e^{j72}} = 1,9\,e^{j18} = 1,8 + j0,6$$

Va rezulta:

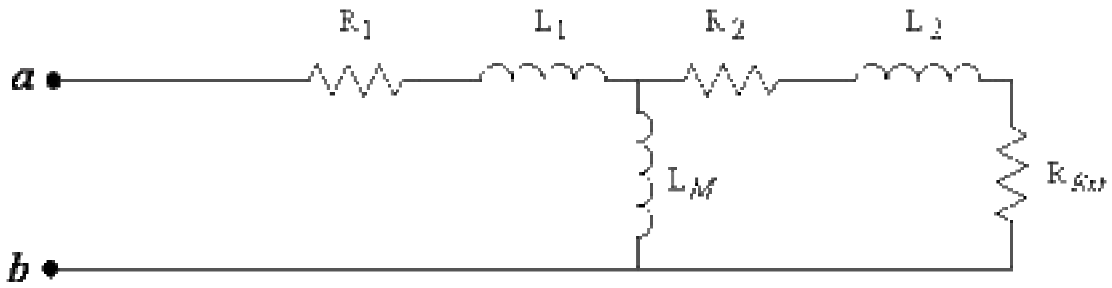
$$\overline{Z}_{total} = \overline{Z}_R + \overline{Z} + \overline{Z}_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{Z} = \overline{Z}_{total} - \overline{Z}_R - \overline{Z}_1 = 7\cos 50 + j7\,\mathrm{sen}\,50 - 2 - 1,8 - j0,6$$

$\Leftrightarrow \overline{Z} = 0.7 + j4.8 = 4.85\,e^{j82}\ \Omega$

---

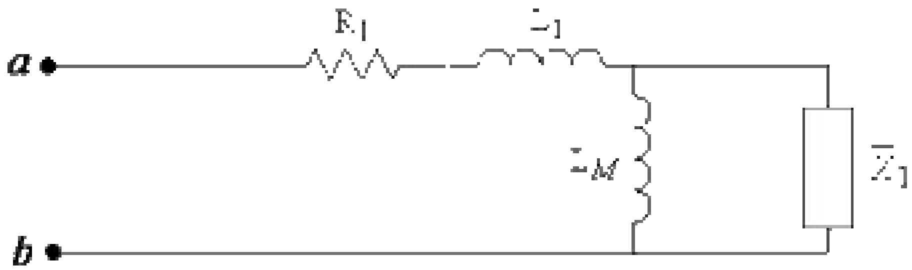
3. Se consideră circuitul de mai jos, în care valorile paramerilor sunt: $R_1 = R_2 = 0,5\Omega$, $L_1 = 5$ mH, $L_2 = 4$ mH, $L_M = 50$ mH și $R_{Ext} = 10\ \Omega$.



Știind că frecvența tensiunii de alimentare este de 50 Hz, determinați impedanța complexă echivalentă văzută de la bornele ***ab***.

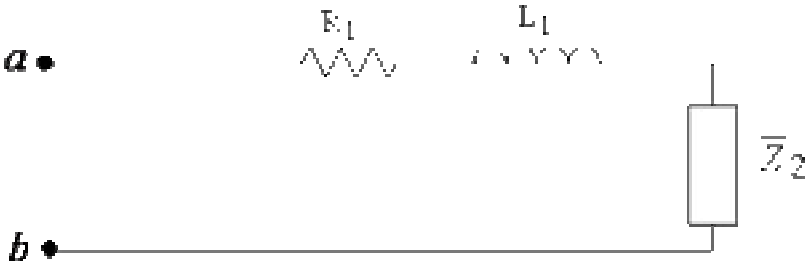
Răspuns >>

O primă etapă constă în calculul impedanței echivalente $\overline{Z}_1$, a circuitului serie format din R_2, L_2 și R_{Ext}:



Cum aceste impedanțe sunt în serie, rezultă $\overline{Z}_1 = (R_2 + R_{Ext}) + j\omega L_2$, în care, înlocuind valorile concrete, se obține: $\overline{Z}_1 = 10,5 + j1,26 = 10,6\,e^{j6.8}\ \Omega$

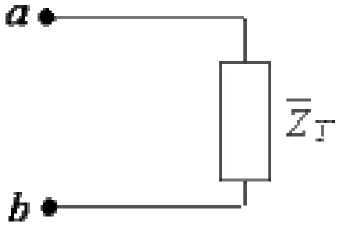
Etapa următoare constă în calculul impedanței $\overline{Z}_2$, care reprezintă impedanța echivalentă a circuitului paralel format din $\overline{Z}_1$ și L_M:



Impedanța $\overline{Z}_2$ va fi:

$$\overline{Z}_2 = \frac{j\omega L_2 \times \overline{Z}_1}{j\omega L_2 + \overline{Z}_1} = \frac{15,7\, e^{j90} \times 10,6\, e^{j6,8}}{15,7\, e^{j90} + 10,6\, e^{j6,8}} = 8,34\, e^{j38,6} = 6,52 + j5,2$$

În final, impedanța $\overline{Z}_T$, care este impedanța echivalentă a circuitului serie format din R_1, L_1 şi $\overline{Z}_2$ este:



$$\overline{Z}_T = R_1 + j\omega L_1 + \overline{Z}_2 = 0,5 + j1,57 + 6,52 + j5,2 = 7,02 + j6,77 = 9,75 e^{j44}\ \Omega$$