e-Learning tools for Electrical Engineering

Circuite rezistive

Tematica: *Circuite electrice*
→ ***Capitol:*** *Analiza circuitelor lineare*
→ ***Secțiunea:***

***Tip resursă*:** ☒ *Expunere* ☐ *Laborator virtual / Exercițiu* ☐ *CVR*

În această secțiune se vor prezenta diferite metode de rezolvare a circuitelor lineare, respectiv metoda generală, simplificarea circuitului prin asocierea serie sau paralel, substituirea cu dipolii echivalenți Thévenin şi/sau Norton şi principiul superpoziției. Se vor prezenta, de asemenea, câteva cazuri particulare de rezolvare imediată.

- cunoştințe anterioare necesare: Teoremele lui Kirchhoff
- nivel: 1 - introductiv
- durata estimată: 1 oră
- autor: Maria José Resende, Francis Labrique
- realizare: Sophie Labrique
- traducere: Sergiu Ivanov

Education et culture

Resursă realizată cu sprijin financiar din partea Comunității Europene. Documentul de față nu angajează decât responsabilitatea autorului(rilor) lui. Comisia îşi declină orice responsabilitate ce ar putea decurge din utilizarea lui.

1. Metoda generală

Metoda generală de rezolvare a unui circuit constă în scrierea şi rezolvarea unui sistem de ecuaţii ce reprezintă legăturile dintre tensiunile şi curenţii din circuit. Aceste ecuaţii se obţin atât pe baza teoremelor lui Kirchhoff, cât şi prin scrierea ecuaţiilor caracteristice ale elementelor din circuit (Componente elementare). În această secţiune se vor considera doar circuitele rezistive, respectiv care nu conţin inductanţe sau capacităţi.

În continuare se va aplica următoarea metodă:

- Se vor numerota cele n elemente (surse şi rezistenţe) din circuit. Cum fiecărui element i se asociază o tensiune şi un curent, celor n elemente le corespund $2n$ necunoscute ce trebuie determinate, respectiv, sunt necesare $2n$ ecuaţii linear independente.

- Se scriu cele n ecuaţii caracteristice corespunzătoare celor n elemente din circuit (Componente elementare)

- Se vor numerota cele N noduri din circuit şi se vor scrie $N-1$ ecuaţii linear independente care rezultă din aplicarea Teoremei I a lui Kirchhoff.

- Se poate demonstra că numărul M de ecuaţii linear independente ce rezultă prin aplicarea Teoremei a II-a a lui Kirchhoff, depinde de numărul de elemente şi de noduri prin relaţia $M = n - N + 1$.

- În final, se rezolvă sistemul obţinut de $n + (N-1) + M$ ecuaţii.

Sistemul este format din:

$$
\begin{aligned}
& n + (N-1) + M \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & n + (N-1) + (n - N + 1) \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & 2n
\end{aligned}
$$

ecuaţii linear independente, deci, suficiente pentru determinarea celor $2n$ necunoscute.

Se consideră circuitul din Figura 1:

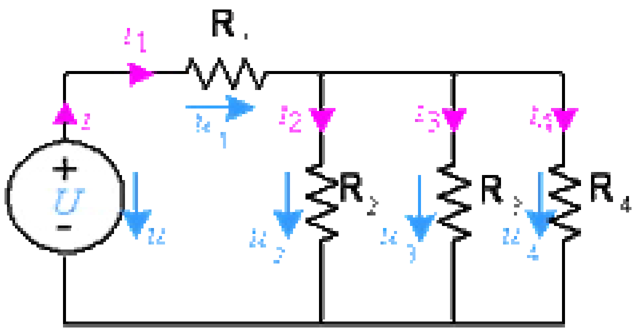


Figura 1 - Exemplu de circuit

- În acest circuit există $n = 5$ elemente (4 rezistenţe şi o sursă de tensiune) ceea ce înseamnă că avem $2n = 10$ necunoscute de determinat: 5 tensiuni (u, u_1, u_2, u_3, u_4) şi 5 curenţi (i, i_1, i_2, i_3, i_4).

- Cele 5 ecuații caracteristice ale elementelor sunt:

$$u = U \qquad u_1 = R_1 i_1 \qquad u_2 = R_2 i_2 \qquad u_3 = R_3 i_3 \qquad u_4 = R_4 i_4$$

- Există $N = 3$ noduri în circuit, respectiv se pot scrie $N - 1 = 2$ ecuații linear independente prin aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff:

$$i = i_1 \qquad i_1 = i_2 + i_3 + i_4$$

- Există $M = n - N + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$ ecuații linear independente ce rezultă prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff. Una din combinațiile de 3 ecuații este:

$$u = u_1 + u_3 \qquad u_2 = u_3 \qquad u_3 = u_4$$

Dar se poate considera și:

$$u = u_1 + u_4 \qquad u_2 = u_4 \qquad u = u_1 + u_2$$

2. Asocierea rezistoarelor

Pentru anumite circuite mai complexe, este mai simplu să se utilizeze echivaleţele asocierii rezistoarelor în serie (vezi Teorema I a lui Kirchhoff) și în paralel (vezi Teorema a II-a a lui Kirchhoff), decât să se recurgă la aplicarea metodei generale.

Rezistoare în serie

Se consideră o porțiune de circuit formată din două rezistoare R_A și R_B conectate în serie, reprezentată în figura de mai jos.

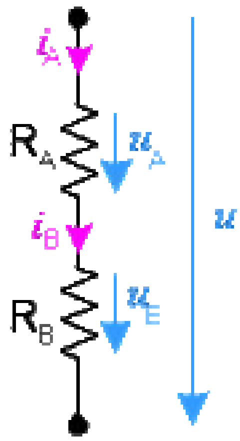


Figura 2 - Rezistoare în serie; divizor de tensiune

Cunoscând tensiunea u la bornele elementelor înseriate, cum se repartizează aceasta între cele două rezistoare?

Prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff se obține:

$$u = u_A + u_B$$

Ținând cont de ecuațiile caracteristice ale fiecărui rezistor, rezultă:

$$u = R_A\, i_A + R_B\, i_B$$

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff se obține $i_A = i_B$, respectiv:

$$u = (R_A + R_B)\, i_A = (R_A + R_B)\, i_B \qquad (1)$$

ceea ce ne permite să afirmăm că **două rezistoare în serie sunt echivalente cu un rezistor, a cărui rezistență este egală cu suma rezistențelor celor două rezistoare înseriate**.

Rezistoare în serie $\qquad R_{ech} = R_A + R_B$

Expresia (1) este echivalentă cu:

$$\frac{u}{R_A + R_B} = i_A = i_B$$,

ceea ce ne permite să concluzionăm că tensiunile la bornele fiecărui rezistor vor fi :

$$u_A = R_A i_A = \frac{R_A}{R_A + R_B} u \qquad \text{şi} \qquad u_B = R_B i_B = \frac{R_B}{R_A + R_B} u$$

Raționamentul de mai sus se poate generaliza pentru n rezistoare conectate în serie, respectiv, tensiunea la bornele rezistorului R_k este:

$$u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \quad + R_n} u$$

Asocierea de rezistoare prezentată în Figura 2 se numeşte **divizor de tensiune**, deoarece tensiunea u dintre bornele conexiunii serie, se divide în mai multe tensiuni, la bornele rezistoarelor înseriate.

Rezistoare în paralel

Se consideră o porțiune de circuit formată din două rezistoare R_A şi R_B conectate în paralel, reprezentată în figura de mai jos.

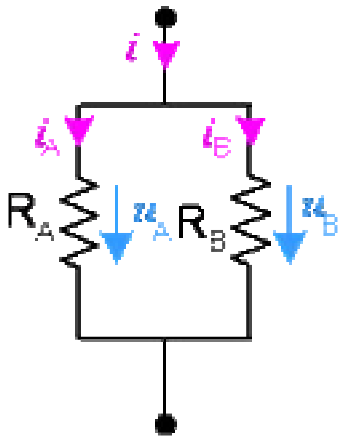


Figura 3 - Rezistoare în paralel; divizor de curent

Cunoscând curentul i care circulă prin acest ansamblu în paralel, cum se repartizează acesta între cele două rezistoare?

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff se obține:

$$i = i_A + i_B$$

Ținând cont de ecuațiile caracteristice ale celor două rezistoare rezultă:

$$i = \frac{u_A}{R_A} + \frac{u_B}{R_B}$$

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff se obține $u_A = u_B$, respectiv:

$$i = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right) u_A = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right) u_B \qquad (2)$$

ceea ce este echivalent cu

$$i = \frac{R_A + R_B}{R_A \cdot R_B} u_A = \frac{R_A + R_B}{R_A \cdot R_B} u_B ,$$

ceea ce ne permite să afirmăm că **două rezistoare în paralel sunt echivalente cu un rezistor, a cărui invers al rezistenței este egal cu suma inverselor rezistențelor celor două rezistoare în paralel**.

Rezistoare în paralel $$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}$$

Expresia (2) este echivalentă cu:

$$\frac{i}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} = u_A = u_B$$

ceea ce ne permite să concluzionăm că prin fiecare rezistor vor circula curenții:

$$i_A = \frac{u_A}{R_A} = \frac{\frac{1}{R_A}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} i \qquad \text{şi} \qquad i_B = \frac{u_B}{R_B} = \frac{\frac{1}{R_B}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} i$$

Raționamentul de mai sus se poate generaliza pentru n rezistoare conectate în paralel, respectiv curentul prin rezistorul R_k este:

$$i_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} i$$

Asocierea de rezistoare prezentată în Figura 3 se numeşte **divizor de curent**, deoarece curentul i care circulă prin ansamblul de rezistoare, se divide în curenții care circulă prin fiecare rezistor conectat în paralel.

3. Dipolul Thevenin şi dipolul Norton

Dipolul Thévenin este constituit dintr-o sursă de tensiune u_T, în serie cu un rezistor R_T, aşa cum se vede în Figura 3.

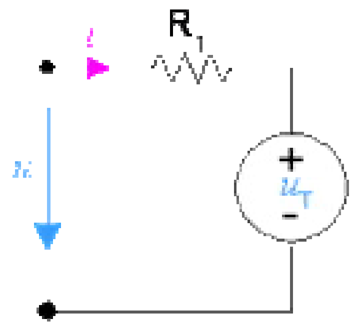


Figura 3 - Dipolul Thévenin

Dipolul Norton este constituit dintr-o sursă de curent i_N, în paralel cu un rezistor R_N, aşa cum se vede în Figura 4.

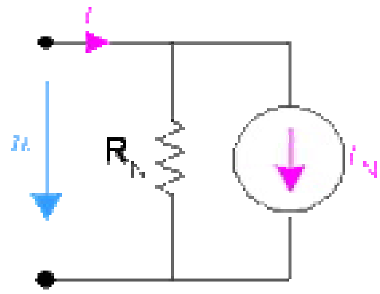


Figura 4 - Dipolul Norton

Rezolvarea circuitelor cu ajutorul dipolilor Thévenin sau Norton, constă în înlocuirea unei părţi din circuit cu dipolul echivalent Thévenin sau Norton.

Exemplu de calcul pentru un circuit ce conține o sursă de tensiune

Se consideră circuitul din figura de mai jos şi dipolul Thévenin corespunzător, văzut de la bornele AB:

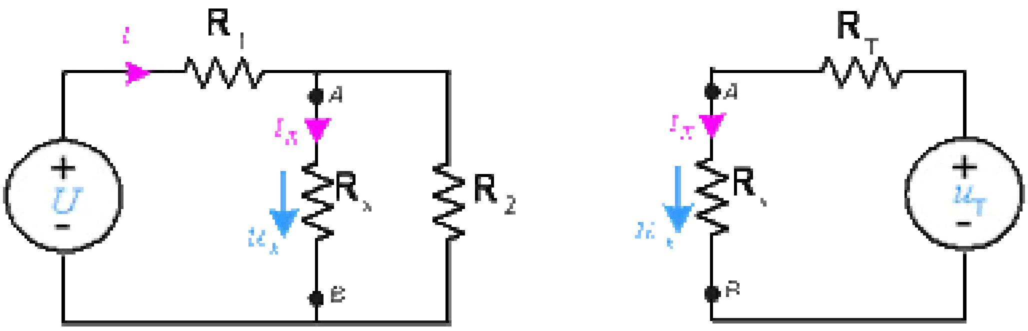


Figura 5 - Circuit cu sursă de tensiune şi dipolul Thévenin corespunzător, relativ la bornele AB

Tensiunea u_T este tensiunea între bornele AB dacă R_x ar fi înlocuită cu un circuit deschis.

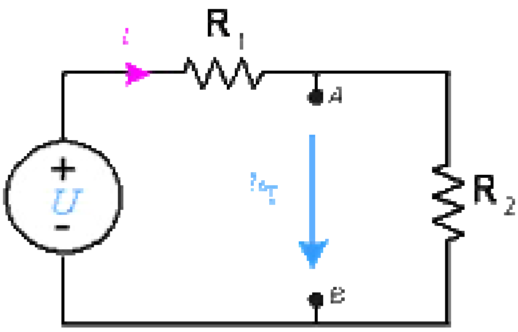


Figura 6 - Circuit deschis între bornele AB

Ținând cont de relația obținută pentru divizorul de tensiune, u_T este egală cu:

$$u_T = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

Rezistența R_T este rezistența văzută de la bornele AB, când se anulează sursa de tensiune, respectiv, când se înlocuieşte sursa de tensiune cu un scurt-circuit.

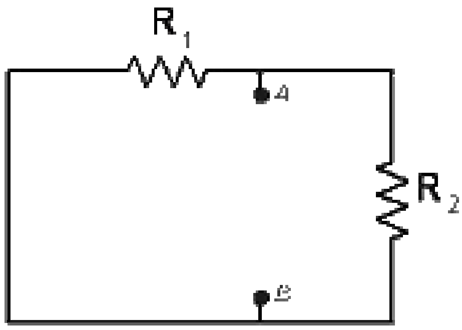


Figura 7 - Circuit deschis între bornele AB

Ținând cont că R_T rezultă prin asocierea în paralel a rezistoarelor, ea este egală cu:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Exemplu de calcul pentru un circuit ce conține o sursă de curent

Se consideră circuitul din figura de mai jos şi dipolul Thévenin corespunzător, văzut de la bornele AB:

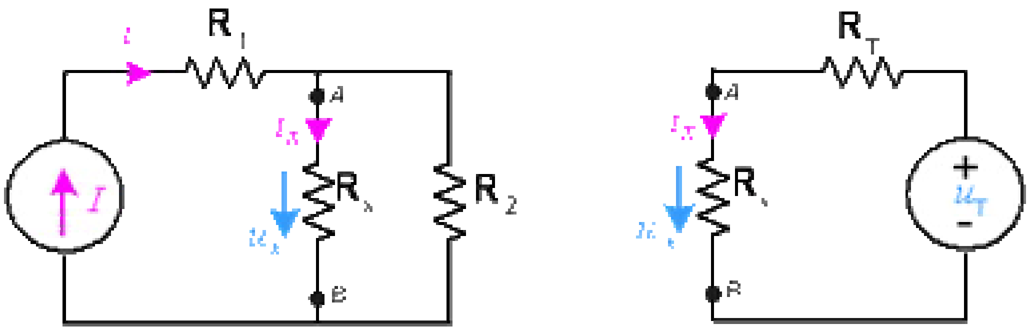


Figura 8 - Circuit cu sursă de curent şi dipolul Thévenin corespunzător, relativ la bornele AB

Tensiunea u_T este tensiunea care ar fi între bornele AB dacă R_x ar fi înlocuită cu un circuit deschis.

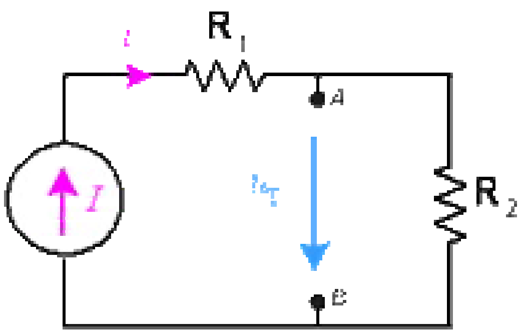


Figura 9 - Circuit deschis între bornele AB

Tensiunea u_T este egală cu:

$$u_T = R_2 I$$

Rezistența R_T este rezistența văzută de la bornele AB, când se anulează sursa de curent, respectiv, când se înlocuieşte sursa de curent cu un circuit deschis.

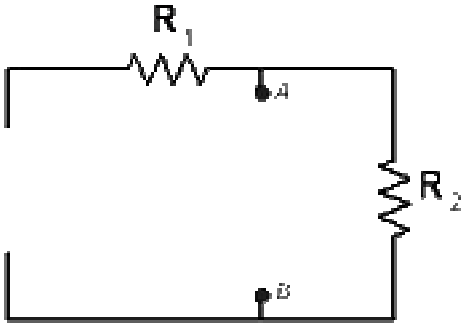


Figura 10 - Circuit deschis la bornele AB

În aceste condiții, R_T este egală cu:

$$R_T = R_2$$

Trecerea de la dipolul echivalent Thévenin la dipolul echivalent Norton

Pentru a compara cei doi dipoli echivalenți, se poate trece uşor de la unul la altul.

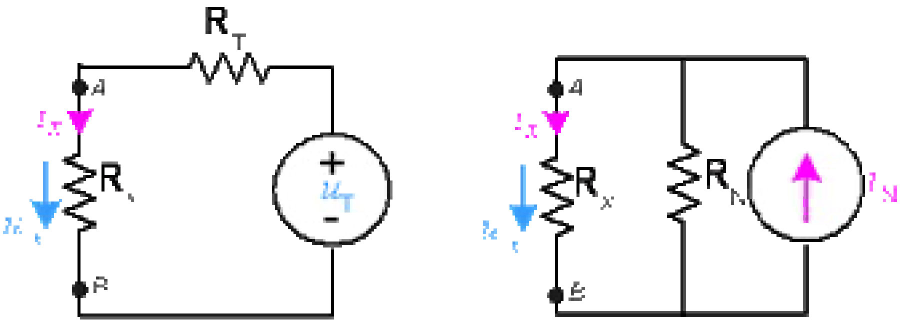


Figura 11 - Dipolul echivalent Thévenin şi dipolul echivalent Norton

Pe baza dipolului echivalent Thévenin se poate scrie expresia:

$$i_x = \frac{u_T}{R_T} - \frac{u_x}{R_T}$$

Pe baza dipolului echivalent Norton se poate scrie expresia:

$$i_x = i_N - \frac{u_x}{R_T}$$

Cum, privit de la bornele AB, cele două circuite sunt echivalente, se poate concluziona că:

$$i_N = \frac{u_T}{R_T} \qquad \text{şi} \qquad R_N = R_T$$

Metoda de rezolvare a circuitelor cu ajutorul dipolilor echivalenţi Thévenin şi Norton este interesantă mai ales când trebuie să se **determine tensiunea şi curentul aferente unui anumit element, fără să trebuiască rezolvat întregul circuit**.

Se poate determina dipolul echivalent Thévenin sau Norton, cu excepţia a două cazuri particulare:

• Dacă dipolul echivalent Thévenin se reduce la o sursă ideală de tensiune, nu există dipol echivalent Norton

• Dacă dipolul echivalent Norton se reduce la o sursă ideală de curent, nu există dipol echivalent Thévenin

Totdeauna, chiar şi în cazurile particulare, dacă nu trebuie să se determine dipolii echivalenţi Thévenin sau Norton, circuitele pot fi tratate, ţinând cont de elementele conectate în serie sau în paralel.

4. Principiul superpoziţiei

Principiul superpoziţiei este foarte util atunci când circuitul de analizat conţine tipuri diferite de surse (de tensiune şi/sau de curent).

Metoda constă în rezolvarea circuitului, separat pentru fiecare sursă (considerându-le pe celelalte "deconectate") şi însumarea soluţiilor individuale astfel obţinute, astfel încât să se obţină soluţia corespunzătoare circuitului complet, cu toate sursele.

Se ştie că o sursă de tensiune "deconectată" este echivalentă cu un scurt-circuit, iar o sursă de curent "deconectată" corespunde unui circuit deschis.

Se consideră circuitul din Figura 12. Se cere să se determine curentul i_1, utilizând metoda superpoziţiei.

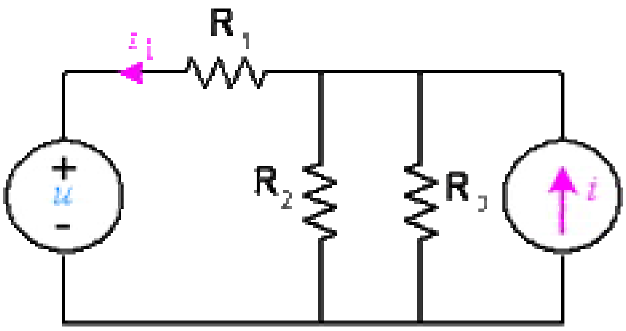


Figura 12 - Exemplu de circuit

Prin deconectarea sursei de tensiune, configuraţia circuitului devine cea din Figura 13.

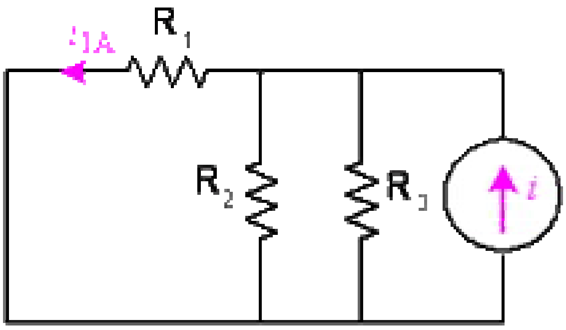


Figura 13 - Exemplul de circuit cu sursa de tensiune deconectată (în scurt-circuit)

Utilizând relația divizorului de curent se obține:

$$i_{1A} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} i$$

Prin deconectarea sursei de curent, configurația circuitului devine cea din Figura 14.

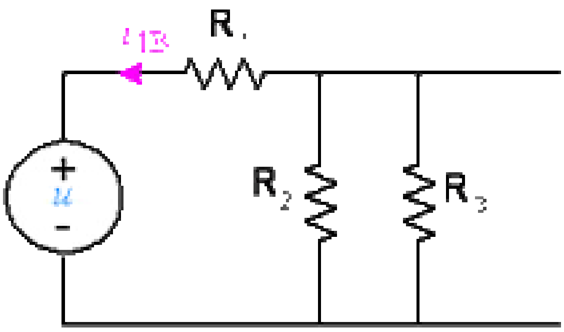


Figura 14 - Exemplul de circuit cu sursa de curent deconectată (în circuit deschis)

Utilizând relația divizorului de tensiune şi asocierea în serie şi în paralel a rezistoarelor, tensiunea u_{1B} la bornele lui R_1 este:

$$u_{1B} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} (-u)$$

Ținând cont de ecuația caracteristică a lui R_1, $u_{1B} = R_1 i_{1B}$, se obține:

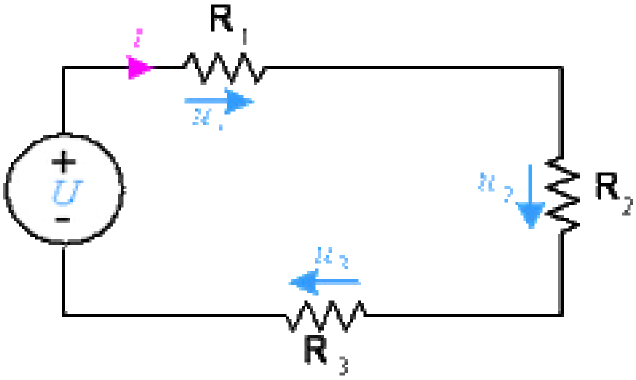
$$i_{1B} = \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} (-u)$$

Curentul i_1 rezultat ca urmare a acțiunii celor două surse va fi:

$$i_1 = i_{1A} + i_{1B} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} j + \frac{1}{R_1 + \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_3}} (-u)$$

5. Cazuri particulare

Circuit cu o sursă de tensiune şi toate elementele în serie



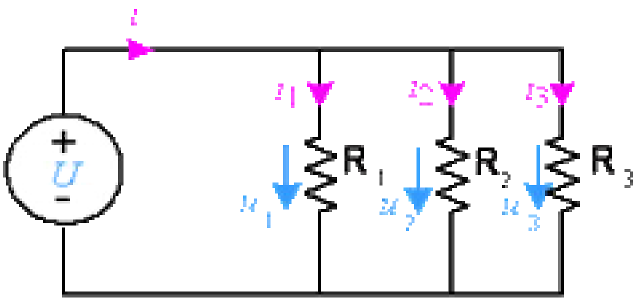
Toate elementele sunt parcurse de acelaşi curent i

$$i = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Rezultă că tensiunile la bornele rezistoarelor vor fi:

$$u_1 = R_1\, i \qquad u_2 = R_2\, i \qquad u_3 = R_3\, i$$

Circuit cu o sursă de tensiune şi toate elementele în paralel



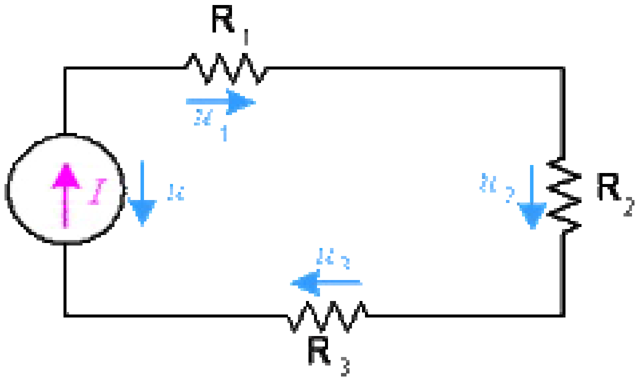
Toate elementele vor fi supuse aceleiaşi tensiuni U

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \qquad i_2 = \frac{U}{R_2} \qquad i_3 = \frac{U}{R_3}$$

Aplicând teorema I a lui Kirchhoff, rezultă curentul i :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

Circuit cu o sursă de curent şi toate elementele în serie



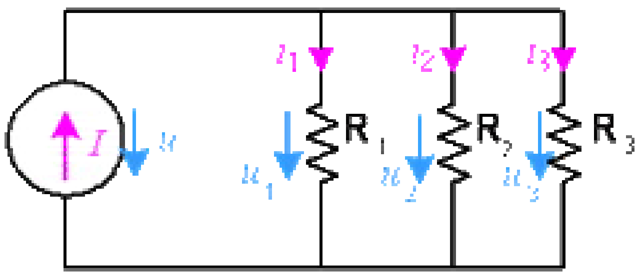
Toate elementele sunt parcurse de acelaşi curent I

$$u = (R_1 + R_2 + R_3)\, I$$

Rezultă că tensiunile la bornele rezistoarelor vor fi:

$$u_1 = R_1\, I \qquad u_2 = R_2\, I \qquad u_3 = R_3\, I$$

Circuit cu o sursă de curent şi toate elementele în paralel



Toate elementele vor fi supuse aceleiaşi tensiuni u

$$u = \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Rezultă curenții din fiecare rezistor:

$$i_1 = \frac{u}{R_1} \qquad i_2 = \frac{u}{R_2} \qquad i_3 = \frac{u}{R_3}$$