e-LEE
e-Learning tools for Electrical Engineering

Temática – Circuitos Eléctricos

Capítulo – Análise de Circuitos Lineares

CIRCUITOS RESISTIVOS

INTRODUÇÃO

Nesta secção apresentam-se diversas metodologias para resolução de circuitos lineares tais como o método geral, a simplificação do circuito por associação série ou paralelo, a substituição pelos dipolos equivalentes de Thévenin e/ou de Norton e o princípio da sobreposição. Apresentam-se ainda alguns casos particulares de resolução imediata.

- Pré-requisitos: Leis de Kirchhoff
- Nivel : Bases de Engenharia Electrotécnica
- Duração estimada: 1 hora
- Autor: Maria José Resende, Francis Labrique
- Realização : Sophie Labrique

Este projecto é financiado pela União Europeia no âmbito de uma acção Sócrates-Minerva. As informações nele contidas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores. A União Europeia declina toda a responsabilidade relativamente ao seu uso.

1. MÉTODO GERAL

O método geral para resolução de um circuito, consiste na escrita e resolução de um conjunto de equações que relacionam as tensões e correntes presentes no circuito. Estas equações são obtidas tanto através das leis de Kirchhoff, quanto das equações características dos elementos presentes no circuito. Neste capítulo, os circuitos resumir-se-ão a circuitos resistivos isto é, não serão analisados circuitos contendo indutâncias nem capacidades.

Os passos a seguir para aplicação deste método são:

- Contar o número de elementos n (fontes e resistências) presentes no circuito. Como a cada elemento, está associada uma tensão e uma corrente, n elementos correspondem a $2n$ incógnitas a determinar, pelo que serão necessárias $2n$ equações linearmente independentes.
- Escrever as n equações características resultantes dos n elementos presentes no circuito (ver Componentes Elementares)
- Contar o número de nós, N, presentes no circuito (ver Lei dos Nós) e escrever as $N-1$ equações linearmente independentes que resultam da aplicação da Lei dos Nós.
- Pode mostrar-se que o número M de equações linearmente independentes resultantes da aplicação da Lei das Malhas se relaciona com o número de elementos e de nós através da relação $M = n - N + 1$.
- Finalmente, resolver o sistema composto pelas $n + (N-1) + M$ equações obtidas

O sistema é formado por:

$$\begin{aligned} & n + (N-1) + M && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & n + (N-1) + (n - N + 1) && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & 2n \end{aligned}$$

equações linearmente independentes e, portanto, suficientes para determinar as $2n$ incógnitas.

Considere-se o circuito representado na Figura 1:

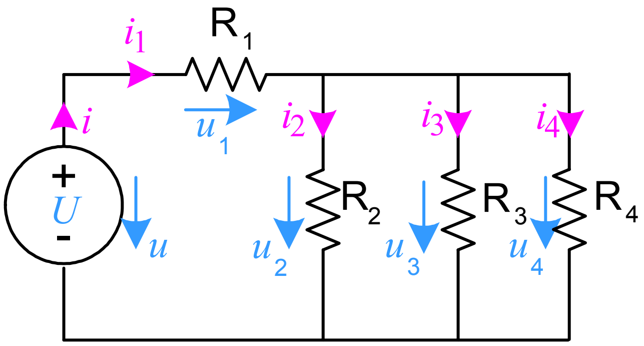


Figura 1 – Circuito

- Neste circuito existem $n = 5$ elementos (4 resistências e uma fonte de tensão) o que equivale a dizer que existem $2n = 10$ incógnitas a determinar; 5 tensões (u, u_1, u_2, u_3, u_4) e 5 correntes (i, i_1, i_2, i_3, i_4).

- As 5 equações provenientes das características de cada elemento são:

$$u = U \qquad u_1 = R_1\, i_1 \qquad u_2 = R_2\, i_2 \qquad u_3 = R_3\, i_3 \qquad u_4 = R_4\, i_4$$

- Existem $N = 3$ nós neste circuito, pelo que se podem escrever $N - 1 = 2$ equações linearmente independentes através da Lei do Nós:

$$i = i_1 \qquad i_1 = i_2 + i_3 + i_4$$

- Existem $M = n - N + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$ equações linearmente independentes resultantes da aplicação da Lei das Malhas. Uma escolha possível para estas 3 equações é:

$$u = u_1 + u_3 \qquad u_2 = u_3 \qquad u_3 = u_4$$

  Mas também poderia ser:

$$u = u_1 + u_4 \qquad u_2 = u_4 \qquad u = u_1 + u_2$$

2. ASSOCIAÇÃO DE RESISTÊNCIAS

Para certos circuitos de reduzida complexidade, por vezes, é mais simples utilizar equivalências entre associações de resistências em série (ver Leis dos Nós) e em paralelo (ver Leis das Malhas), do que resolver o circuito apenas com recurso ao método geral.

Resistências em Série

Considere-se uma parte de um circuito onde duas resistências R_A e R_B estão ligadas em série, tal como se representa na figura seguinte.

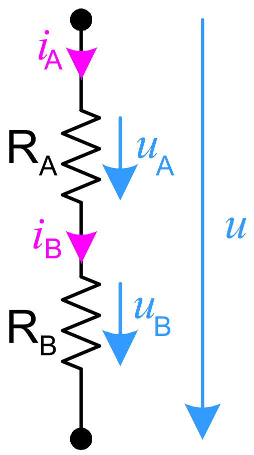


Figura 2 – Resistências em série; divisor de tensão

Sendo u a tensão aos terminais da série, como se repartirá esta tensão por cada uma das resistências?

Pela Lei das Malhas obtém-se:

$$u = u_A + u_B$$

Atendendo à equação característica de uma resistência, resulta:

$$u = R_A\ i_A + R_B\ i_B$$

Pela Lei dos Nós obtém-se $i_A = i_B$, pelo que:

$$u = (R_A + R_B)i_A = (R_A + R_B)i_B \qquad (1)$$

o que permite afirmar que **duas resistência em série são equivalentes a uma resistência cujo valor corresponde à soma dos valores de cada uma.**

Resistências em série $\qquad R_{eq} = R_A + R_B$

A expressão (1) é equivalente a:

$$\frac{u}{R_A + R_B} = i_A = i_B$$

o que permite concluir que a tensão aos terminais de cada resistência será então:

$$u_A = R_A i_A = \frac{R_A}{R_A + R_B} u \qquad \text{e} \qquad u_B = R_B i_B = \frac{R_B}{R_A + R_B} u$$

O raciocínio anterior pode ser generalizado para n resistência em série, sendo a tensão aos terminais da resistência R_k dada por:

$$u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} u$$

A associação de resistências representada na Figura 2 também se denomina de **divisor de tensão**, uma vez que a tensão u aos terminais da série se subdivide pelas diversas tensões aos terminais das resistências.

Resistências em Paralelo

Considere-se uma parte de um circuito onde duas resistências R_A e R_B estão ligadas em paralelo, tal como se representa na figura seguinte.

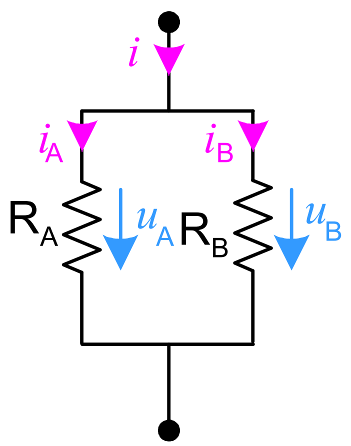


Figura 3 – Resistências em paralelo; divisor de corrente

Sendo i a corrente que circula nesta associação paralelo, como se repartirá esta corrente por cada uma das resistências?

Pela Lei dos Nós obtém-se:

$$i = i_A + i_B$$

Atendendo à equação característica de uma resistência, resulta:

$$i = \frac{u_A}{R_A} + \frac{u_B}{R_B}$$

Pela Lei das Malhas obtém-se $u_A = u_B$, pelo que:

$$i = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right) u_A + \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right) u_B \qquad (2)$$

ou, o que é equivalente,

$$i = \frac{R_A + R_B}{R_A \times R_B} u_A = \frac{R_A + R_B}{R_A \times R_B} u_B$$

o que permite afirmar que **duas resistência em paralelo são equivalentes a uma resistência cujo inverso do valor corresponde à soma dos inversos dos valores de cada uma.**

Resistências em paralelo $\qquad \dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_B}$

A expressão (2) é equivalente a:

$$\frac{i}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} = u_A = u_B$$

o que permite concluir que a corrente em cada resistência será então:

$$i_A = \frac{u_A}{R_A} = \frac{\frac{1}{R_A}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} i \qquad \text{e} \qquad i_B = \frac{u_B}{R_B} = \frac{\frac{1}{R_B}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}} i$$

O raciocínio anterior pode ser generalizado para n resistência em paralelo, sendo a corrente na resistência R_k dada por:

$$i_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}} i$$

A associação de resistências representada na Figura 3 também se denomina de **divisor de corrente**, uma vez que a corrente i que circula no paralelo se subdivide pelas diversas correntes nas resistências.

3. DIPOLO DE THÉVENIN E DIPOLO DE NORTON

O dipolo de Thévenin é constituído por uma fonte de tensão u_T em série com uma resistência R_T tal como representado na Figura 3.

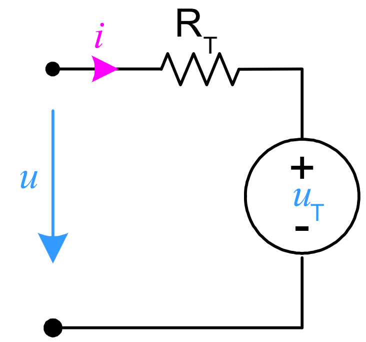


Figura 3 – Dipolo de Thévenin

O dipolo de Norton é constituído por uma fonte de corrente i_N em paralelo com uma resistência R_N tal como representado na Figura 4.

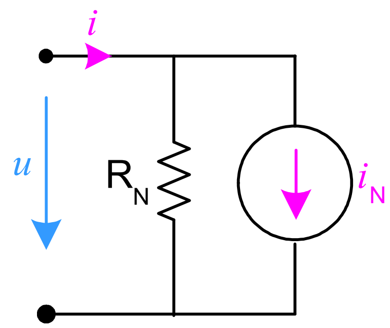


Figura 4 – Dipolo de Norton

A resolução de circuitos através do uso do dipolo de Thévenin ou de Norton, consiste na substituição de parte do circuito, pelo seu equivalente de Thévenin ou de Norton.

Exemplo de cálculo de um circuito com uma fonte de tensão

Considere-se o circuito representado na Figura seguinte e o respectivo dipolo de Thévenin, do ponto de vista dos terminais AB:

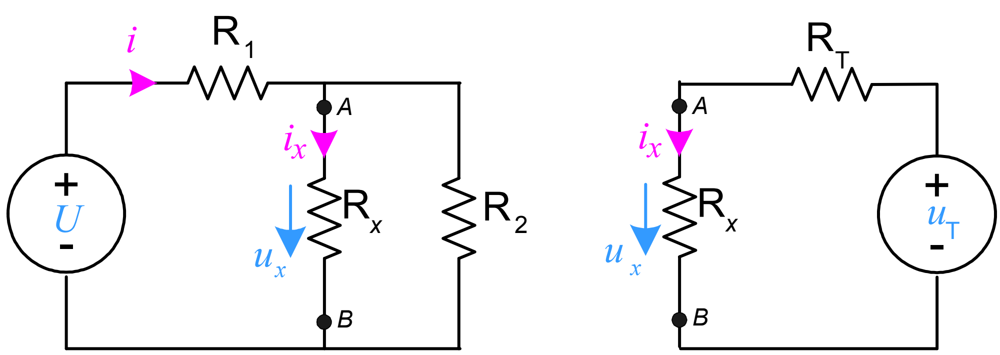


Figura 5 – Circuito com fonte de tensão e respectivo dipolo de Thévenin, relativamente aos terminais AB

A tensão u_T é a tensão que estaria aos terminais AB se R_x fosse substituído por um circuito aberto.

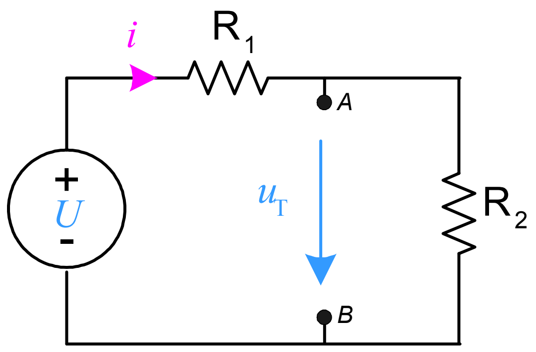


Figura 6 – Circuito aberto aos terminais AB

Pela relação do divisor de tensão u_T é igual a:

$$u_T = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

A resistência R_T é a resistência vista dos terminais AB, quando se anula a fonte de tensão, isto é, quando se substitui a fonte de tensão por um curto-circuito.

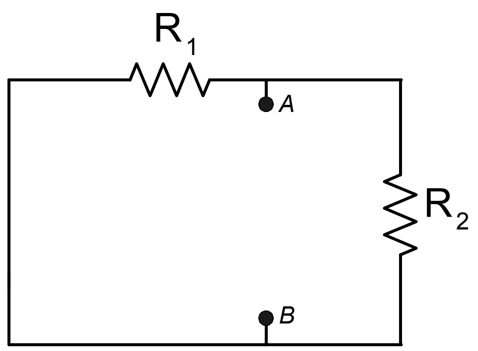


Figura 7 – Circuito aberto aos terminais AB

Pela relação da associação de resistências em paralelo R_T é igual a:

$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Exemplo de cálculo de um circuito com uma fonte de corrente

Considere-se o circuito representado na Figura seguinte e o respectivo dipolo de Norton, do ponto de vista dos terminais AB:

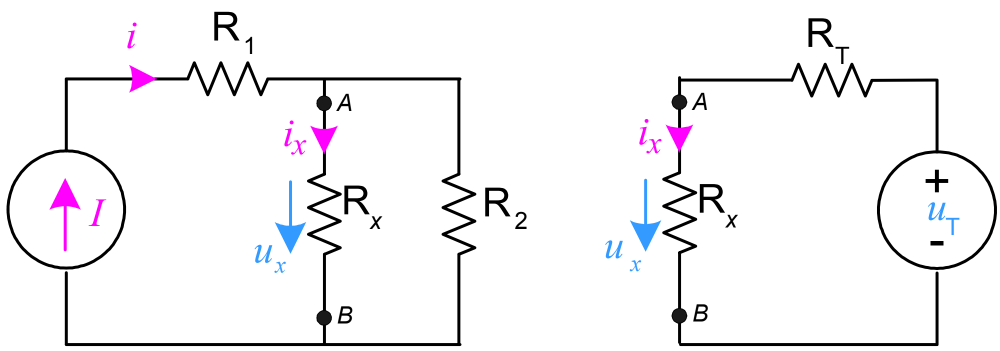


Figura 8 – Circuito com fonte de corrente e respectivo dipolo de Thévenin, relativamente aos terminais AB

A tensão u_T é a tensão que estaria aos terminais AB se R_x fosse substituído por um circuito aberto.

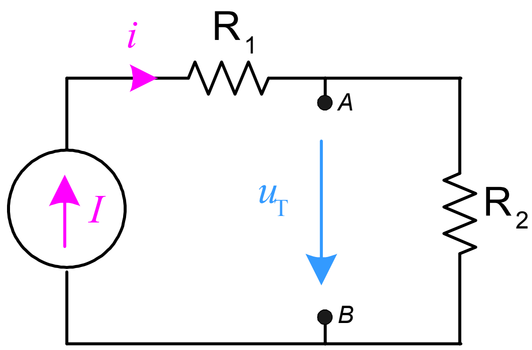


Figura 9 – Circuito aberto aos terminais AB

A tensão u_T é igual a:

$$u_T = R_2 I$$

A resistência R_T é a resistência vista dos terminais AB, quando se anula a fonte de corrente, isto é, quando se substitui a fonte de corrente por um circuito aberto.

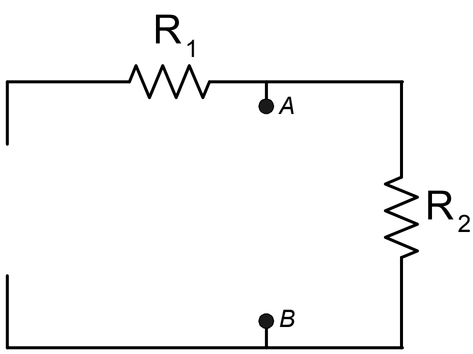


Figura 10 – Circuito aberto aos terminais AB

Nestas condições R_T é igual a:

$$R_T = R_2$$

Passar do equivalente de Thévenin ao equivalente de Norton

Por comparação dos dois equivalentes, facilmente se passa de um para o outro.

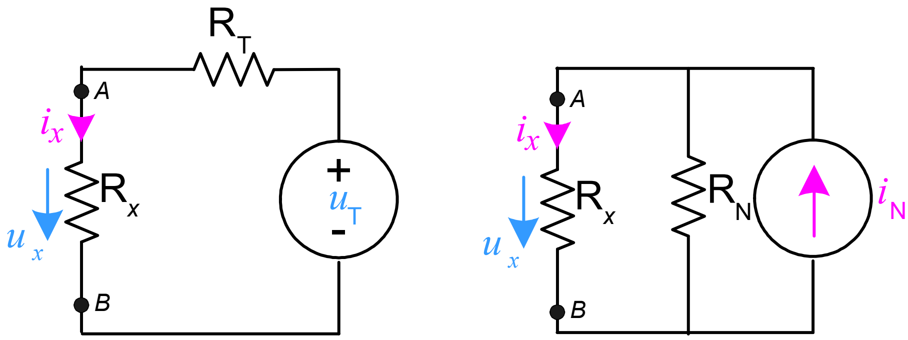


Figura 11 – Equivalente de Thévenin e equivalente de Norton

Do equivalente de Thévenin pode obter-se a expressão:

$$i_x = \frac{u_T}{R_T} - \frac{u_x}{R_T}$$

Do equivalente de Norton pode obter-se a expressão:

$$i_x = i_N - \frac{u_x}{R_T}$$

Como, do ponto de vista dos terminais AB, os dois circuitos são equivalentes, conclui-se que:

$$i_N - \frac{u_x}{R_T} \qquad \text{e} \qquad R_N = R_T$$

O método de resolução de circuitos através dos equivalentes de Thévenin e de Norton é particularmente interessante quando se quer **conhecer a tensão e corrente aos terminais de um determinado elemento, sem que para isso se tenha de resolver todo o circuito**.

Pode-se sempre calcular o equivalente de Thévenin ou de Norton, excepto em dois casos particulares:

- Se o equivalente de Thévenin se reduz a uma fonte de tensão ideal, não existe equivalente de Norton
- Se o equivalente de Norton se reduz a uma fonte de corrente ideal, não existe equivalente de Thévenin

No entanto, estes casos particulares, correspondem a circuitos para os quais não existe necessidade de calcular os equivalentes de Thévenin ou de Norton, pois tratam-se de circuitos onde todos os elementos estão em série ou todos em paralelo.

4. PRINCÍPIO DA SOBREPOSIÇÃO

O princípio da sobreposição é particularmente útil para resolver circuitos que contenham várias fontes (de tensão e/ou de corrente).

Consiste em resolver o circuito para cada uma das fontes individualmente (estando todas as outras “desligadas”) e somar as soluções individuais assim obtidas, de forma a obter a solução do circuito resultante da acção de todas as fontes.

Saliente-se que uma fonte de tensão “desligada” é equivalente a um curto-circuito e uma fonte de corrente “desligada” corresponde a um circuito aberto.

Considere-se o circuito representado na Figura 12. Pretende-se determinar a corrente i_1 utilizando o método da sobreposição.

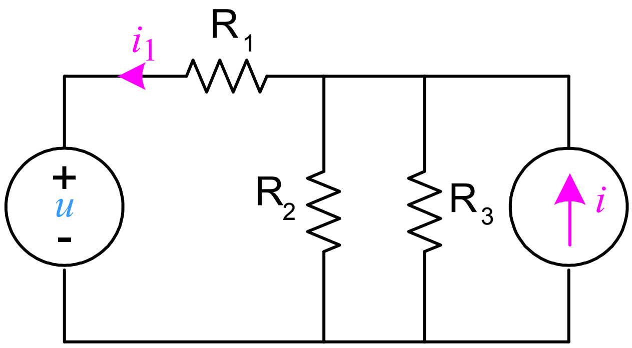


Figura 12 – Circuito Exemplificativo

Desligando a fonte de tensão, a configuração do circuito é a representado na Figura 13.

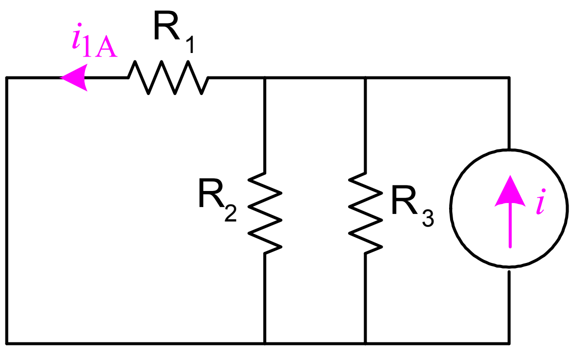


Figura 13 – Circuito exemplificativo com a fonte de tensão desligada (em curto-circuito)

Utilizando a relação do divisor de corrente (ver Associação de Resistências) obtém-se:

$$i_{1A} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} i$$

Desligando a fonte de corrente, a configuração do circuito é a representado na Figura 14.

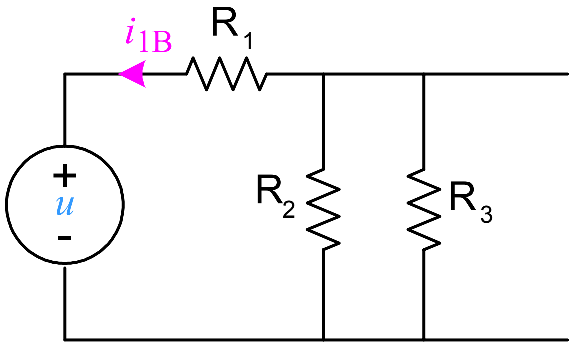


Figura 14 – Circuito exemplificativo com a fonte de corrente desligada (em circuito aberto)

Utilizando a relação do divisor de tensão e da associação em série e paralelo das resistências (ver Associação de Resistências), a tensão u_{1B} aos terminais de R_1 é:

$$u_{1B} = \frac{R_1}{R_1 + \dfrac{R_2\ R_3}{R_2 + R_3}}(-u)$$

Como a equação característica de R_1 é $u_{1B} = R_1 i_{1B}$, obtém-se:

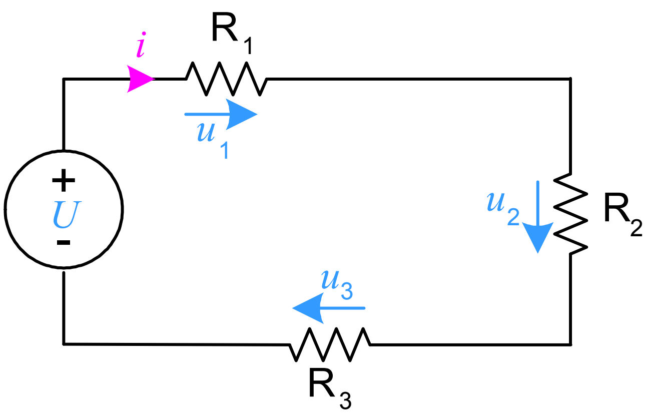
$$i_{1B} = \frac{1}{R_1 + \dfrac{R_2\ R_3}{R_2 + R_3}}(-u)$$

A corrente i_1 resultante da acção das duas fontes será, então:

$$i_1 = i_{1A} + i_{1B} = \frac{\dfrac{1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} i + \frac{1}{R_1 + \dfrac{R_2\ R_3}{R_2 + R_3}}(-u)$$

5. ALGUNS CASOS PARTICULARES

Circuito com uma fonte de tensão e com todos os elementos em série



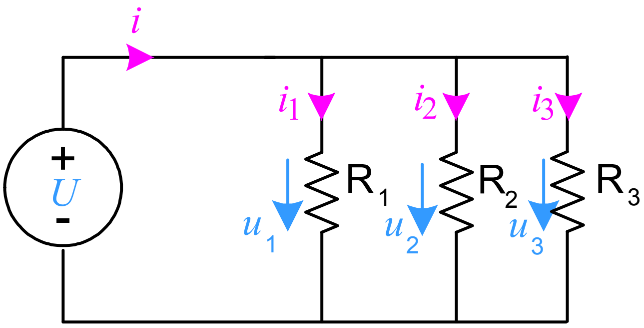
Todos os elementos são percorridos pela mesma corrente i

$$i = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Pelo que as tensões aos terminais das resistências são:

$$u_1 = R_1\ i \qquad u_2 = R_2\ i \qquad u_3 = R_3\ i$$

Circuito com uma fonte de tensão e com todos os elementos em paralelo



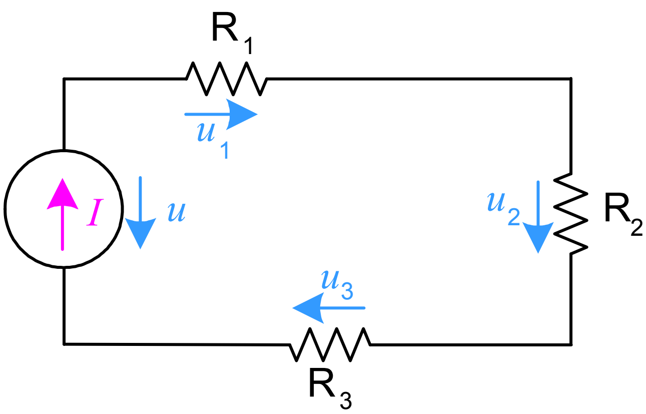
Todos os elementos estão submetidos à mesma tensão U

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \qquad i_2 = \frac{U}{R_2} \qquad i_3 = \frac{U}{R_3}$$

Aplicando a Lei dos Nós a corrente i será:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

Circuito com uma fonte de corrente e com todos os elementos em série



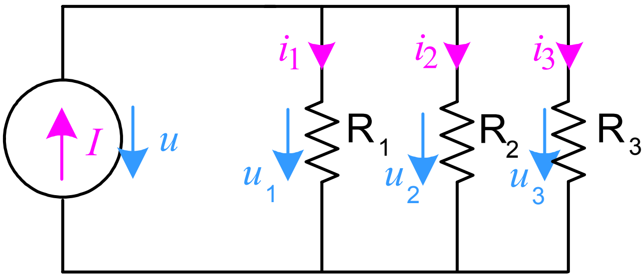
Todos os elementos são percorridos pela mesma corrente I

$$u = (R_1 + R_2 + R_3)\ I$$

Pelo que as tensões aos terminais das resistências são:

$$u_1 = R_1\ I \qquad\qquad u_2 = R_2\ I \qquad\qquad u_3 = R_3\ I$$

Circuito com uma fonte de corrente e com todos os elementos em paralelo



Todos os elementos estão submetidos à mesma tensão u

$$u = \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Pelo que as correntes em cada uma das resistências são:

$$i_1 = \frac{u}{R_1} \qquad\qquad i_2 = \frac{u}{R_2} \qquad\qquad i_3 = \frac{u}{R_3}$$